



El Teorema g para politopos
(The g Theorem for polytopes)

Antonio Fernández González

Trabajo de Fin de Máster
para acceder al
Máster en Matemáticas y Computación
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Francisco Santos Leal
Octubre - 2020

ABSTRACT. The f -vector of a d -polytope P is a vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ where $f_{-1} = 1$ and f_i is the number of i -dimensional faces of P for $i \geq 0$. In 1971, Peter McMullen conjectured a characterization of the vectors in \mathbb{N}^d which are the f -vectors of some simplicial d -polytope, known as the g Conjecture. Ten years later, the first proof of this Conjecture appeared: the necessity of the conditions, due to Richard P. Stanley, in 1980, and the sufficiency, due to Louis J. Billera and Carl W. Lee, in 1981. While the latter is strongly based on convexity, the former relies on some strong results from algebraic geometry: namely, the Hard Lefschetz Theorem for toric varieties.

In the following years, McMullen began to publish different articles about his polytope algebra, obtaining between 1983 and 1986 a new proof of the necessity of the conditions, interpreting the Hard Lefschetz Theorem in an algebro-combinatorial manner. More recently, in 2010, Balin Fleming and Kalle Karu published yet another proof of this result, somehow mimicking McMullen's proof within the algebra of continuous conewise polynomial functions on the normal fan of a simple polytope; although the idea of the proof is the same as McMullen's, it is much more straightforward.

This Master's Thesis is devoted to the study of the proof of the g Theorem for polytopes, analysing the polytope algebra as defined by McMullen, relating it to the algebra of continuous conewise polynomial functions on simplicial fans, and finally replicating the proof in this last context.

KEY WORDS: combinatorial geometry, g Theorem, polytope algebra, Hard Lefschetz Theorem

RESUMEN. El f -vector de un d -politopo P es un vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ con $f_{-1} = 1$ y f_i es el número de caras i -dimensionales de P para $i \geq 0$. The f -vector of a d -polytope P is a vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ where $f_{-1} = 1$ and f_i is the number of i -dimensional faces of P . En 1971, Peter McMullen conjeturó una caracterización de los vectores de \mathbb{N}^d que son el f -vector de algún d -politopo simplicial, conocía como la Conjetura g . Diez años después, apareció la primera prueba de esta Conjetura: la necesidad de las condiciones, debida a Richard P. Stanley, en 1980, y la suficiencia, debida a Louis J. Billera y Carl W. Lee, en 1981. Mientras la segunda está basada en convexidad, la primera depende de algunos resultados fuertes de geometría algebraica: en particular, el Teorema Duro de Lefschetz para variedades tóricas.

En los años siguientes, McMullen comenzó a publicar artículos sobre su álgebra de politopos, obteniendo entre 1983 y 1986 una nueva prueba de la necesidad de las condiciones, interpretando el Teorema Duro de Lefschetz de forma algebro-combinatoria. Más recientemente, en 2010, Balin Fleming y Kalle Karu publicaron otra prueba más de este resultado, imitando en cierto modo la prueba de McMullen en el contexto del álgebra de funciones continuas polinomiales por conos en el abanico normal de un politopo simple; aunque la idea de la prueba es la misma que la de McMullen, es mucho más directa.

Este Trabajo de Fin de Máster está dedicado al estudio de la prueba del Teorema g para politopos, analizando el álgebra de politopos definida por McMullen, relacionándola con el álgebra de funciones continuas polinomiales por conos en un abanico simplicial, y finalmente replicando la prueba en este último contexto.

PALABRAS CLAVE: geometría combinatoria, Teorema g , álgebra de politopos, Teorema Duro de Lefschetz

Índice

Introducción	1
Capítulo 1. Geometría combinatoria: definiciones, propiedades y resultados	3
1.1. Politopos, poliedros y complejos poliedrales	3
1.2. f -vectores y h -vectores	5
1.3. La Conjetura g	7
1.3.1. El Teorema g para politopos	8
1.3.2. El Teorema g para esferas simpliciales	9
Capítulo 2. El álgebra de politopos	11
2.1. Grupos abelianos y valoraciones	11
2.2. Estructura del álgebra de politopos I: el morfismo de dilatación	13
2.3. Estructura del álgebra de politopos II: logaritmo y exponencial	17
2.4. Álgebras de politopos y de pesos de un politopo simple	20
Capítulo 3. La estructura del álgebra de politopos	23
3.1. Cohomología de haces en abanicos	23
3.2. Funciones polinomiales y exponenciales por conos	29
3.3. Relación con el álgebra de politopos	37
Capítulo 4. Demostración del Teorema g	39
4.1. Funciones polinomiales en el abanico normal de un politopo	39
4.1.1. Subabanicos y abanicos con borde	41
4.2. Teorema Duro de Lefschetz y Relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski	42
4.3. Flips y cohomología	43
Bibliografía	51

Introducción

Dado un politopo P en \mathbb{R}^d (esto es, la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d), podemos contar el número de caras de cada dimensión que tiene P . Así, por ejemplo, un octaedro P tiene 6 vértices, 12 aristas y 8 facetas (más dos caras impropias, \emptyset y el propio P). Codificamos esta información en el f -vector del politopo P , $f(P) = (f_{-1}(P), \dots, f_{d-1}(P))$ donde $f_i(P)$ es el número de caras de dimensión i de P ; en este caso $f(P) = (1, 6, 12, 8)$. Para un icosaedro Q , es $f(Q) = (1, 12, 30, 20)$.

En 1906, Ernst Steinitz publica un artículo en el que caracteriza por completo los f -vectores de los politopos de dimensión 3 ([Ste06], ver también [Zie95, Ejercicio 8.28]): un vector en \mathbb{N}^4 es el f -vector de un politopo de dimensión 3 si y sólo si es de la forma

$$(1, 4, 6, 4) + a(0, 1, 1, 0) + b(0, 0, 1, 1)$$

con $2a \geq b \geq 0$ y $2b \geq a \geq 0$. Además, si $2a = b$ el politopo es simplicial (todas sus caras maximales son triángulos), y si $b = 2a$ el politopo es simple (cada vértice está en 3 triángulos); en particular, si $a = b = 0$, el vector es $(1, 4, 6, 4)$, el de un tetraedro, que es un politopo simplicial y simple.

Para dimensiones más altas, no hay resultados que caractericen los posibles f -vectores de politopos. Sí se sabe, por ejemplo, que existe una cota superior al número de caras que puede tener un politopo en \mathbb{R}^d con f_0 vértices: si P es un tal politopo, tenemos que $f_i(P) \leq c_i(d, f_0)$ para unas ciertas cantidades $c_i(d, f_0)$ (que son las entradas del f -vector de un politopo simplicial particular en \mathbb{R}^d con f_0 vértices).

No existen muchos más resultados para politopos generales. Sí existen, sin embargo, para politopos simpliciales (y sus duales, los simples), ya que tienen mucha más estructura. Si el politopo P es simplicial (esto es, todas sus caras son símlices), podemos definir su h -vector con las relaciones

$$h_k(P) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}(P), \quad 0 \leq k \leq d.$$

Así, para el octaedro, tenemos que $h(P) = (1, 3, 3, 1)$, y para el icosaedro, $h(Q) = (1, 9, 9, 1)$. Observamos que los dos h -vectores son positivos (aunque no son combinaciones positivas del f -vector) y simétricos. Esto no es una casualidad, el h -vector de un politopo simplicial siempre es positivo, ya que se puede interpretar como el número de caras del politopo que satisfacen una cierta propiedad, y también es siempre simétrico. Estas relaciones de simetría se conocen como las ecuaciones de Dehn-Sommerville.

Aún así, estas dos condiciones no bastan para caracterizar por completo los f -vectores de politopos simpliciales. P. McMullen en [McM71] considera el vector $(g_0, \dots, g_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$ dado por

$$g_0 = h_0, \quad g_k = h_k - h_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor.$$

McMullen conjetura en 1971 la siguiente caracterización de los f -vectores de un politopo simplicial, conocida como la Conjetura g (aunque esta lectura de la Conjetura se debe a R. P. Stanley): el vector $f = (f_{-1}, \dots, f_{d-1})$ es el f -vector de un d -politopo simplicial si y sólo si sus h -vector y g -vector satisfacen

- las ecuaciones de Dehn-Sommerville, $h_k = h_{d-k}$ para $0 \leq k \leq d$,
- g es un M -vector; esto es, existe una \mathbb{R} -álgebra graduada R generada por R_1 de forma que $\dim_{\mathbb{R}} R_k = g_k$.

La Conjetura g fue probada cierta diez años después por R. P. Stanley ([Sta80]), que probó la necesidad de las condiciones, y J. L. Billera y C. W. Lee ([BL81]), que probaron la suficiencia. La prueba de Billera y Lee es una construcción ingeniosa usando politopos cíclicos; la de Stanley usa resultados de geometría algebraica para trabajar con la variedad tórica asociada a un politopo simplicial. Más tarde, el propio McMullen publica una prueba de la necesidad de las condiciones que evita resultados de geometría algebraica. Para ello, utiliza propiedades de su álgebra de politopos, [McM89].

En 1997, M. Brion ([Bri97]) publica un artículo en el que da un isomorfismo entre el álgebra de politopos asociada a un politopo simple P y el álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos en el abanico

normal de P . Así, en 2010, B. Fleming y K. Karu [FK10] dan una nueva prueba de la necesidad de las condiciones, interpretando la prueba de McMullen en el contexto de este álgebra de funciones.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es estudiar la demostración del Teorema g para politopos. La estructura de la memoria es la siguiente:

- El Capítulo 1 está dedicado, en primer lugar, a recoger todas las definiciones y propiedades básicas en geometría combinatoria necesarias para enunciar, entender y demostrar el Teorema g para politopos. Tras una pequeña sección sobre f -vectores y h -vectores, donde se incluye una prueba de las ecuaciones de Dehn-Sommerville, Teorema 1.2.1, la Sección 1.3 está dedicada a enunciar la Conjetura g (Conjetura 1.3.2), comentar las primeras demostraciones, debidas a Billera y Lee en [BL81] y Stanley en [Sta80], e introducir el Teorema g para esferas simpliciales ([Adi18]).
- El objetivo del Capítulo 2 es introducir el álgebra de politopos Π a la manera de McMullen en [McM89], como un grupo abeliano libre con un generador por cada politopo P en \mathbb{R}^d , y dotándole de estructura, primero de anillo (Proposición 2.2.1), y luego de “casi álgebra” graduada sobre \mathbb{Q} (Teorema 2.3.3); con “casi álgebra” nos referimos a que Π es un anillo conmutativo con unidad que admite una graduación $\Pi = \Xi_0 \oplus \Xi_1 \oplus \dots \oplus \Xi_d$, donde cada Ξ_i con $i \geq 1$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} , pero es $\Xi_0 = \mathbb{Z}$ (en vez de $\Xi_0 = \mathbb{Q}$, que es lo que le falta a Π para ser una \mathbb{Q} -álgebra).

El Capítulo termina en la Sección 2.4 introduciendo el álgebra de politopos y el álgebra de pesos asociadas a un politopo P , como en [McM93] y [McM96].

- El Capítulo 3 sigue el trabajo de Brion, [Bri97], en el que se relaciona el álgebra de politopos de McMullen con el álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos en un abanico. El Capítulo comienza, en la Sección 3.1, definiendo haces en abanicos y construyendo una cohomología de haces en abanicos simpliciales, Definición 3.1.4. A partir de ciertos haces en el abanico Σ , construimos los espacios de Hodge $H^{i,j}(\Sigma)$ del abanico como los espacios de cohomología de estos haces (Definición 3.1.7) y demostramos que, para el abanico normal de un politopo simple P , las dimensiones de los espacios de Hodge vienen dadas por el h -vector de P (Corolario 3.1.9) y los espacios de j -pesos de P son isomorfos a $H^{j,j}(\Sigma)$ (Teorema 3.1.10).

En la Sección 3.2 estudiamos en detalle el álgebra de funciones continuas polinomiales por conos y el álgebra de funciones continuas exponenciales por conos en un abanico Σ , y las relacionamos entre ellas a través del desarrollo de Taylor y el álgebra de series de potencias formales compatibles por conos en Σ . Finalmente, en la Sección 3.3 damos un isomorfismo entre el álgebra de politopos Π y el álgebra de funciones polinomiales por conos en cualquier abanico cocientada por el ideal generado por las funciones lineales globales, y entre el álgebra de politopos asociada a un politopo simple $\Pi(P)$ y la correspondiente álgebra cociente en el abanico normal de P (Corolarios 3.3.3 y 3.3.5).

- Finalmente, ofrecemos en el Capítulo 4 una prueba de la necesidad de las condiciones de McMullen, debida a Fleming y Karu en [FK10], usando el álgebra de funciones continuas polinomiales por conos en el abanico normal de un politopo simple P . Las dos herramientas principales para la demostración son el Teorema Duro de Lefschetz ¹ y las relaciones bilineales de Hodge-Riemann-Minkowski (Teoremas 4.2.1 y 4.2.2); la demostración, que aparece como demostración simultánea de los Teoremas 4.3.7 y 4.3.8, es por inducción en la dimensión del abanico: el segundo teorema en dimensión $d-1$ implica el primero en dimensión d , y el primero en dimensión d implica el segundo en la misma dimensión. Así, sabiendo que se verifica el Teorema Duro de Lefschetz en dimensión d , la demostración del Teorema g es una consecuencia inmediata (Corolario 4.3.9).

Para probar las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski a partir del Teorema Duro de Lefschetz, estudiamos los cambios en el álgebra de funciones continuas polinomiales por conos cuando el abanico sufre un cambio combinatorio local llamado *flip*, a lo que dedicamos buena parte de la Sección 4.3. En particular, vemos que todos los abanicos normales de politopos d -dimensionales están conectados por flips con el abanico normal de un símplex (y, por tanto, todos están conectados entre sí por flips). Así, como las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski se cumplen en el abanico normal de un símplex (Lema 4.3.1), basta ver que se conservan a través de flips.

¹Propiamente hablando, el Teorema Duro de Lefschetz es un resultado de los años 20 sobre la cohomología de una variedad proyectiva n -dimensional no singular X : que la clase de cohomología de un hiperplano induce isomorfismos $H^{n-k}(X) \rightarrow H^{n+k}(X)$. Esta propiedad se puede abstraer a cualquier \mathbb{R} -álgebra graduada R . Aunque lo propio sería decir que un elemento de R verifica la Propiedad Dura de Lefschetz, en la literatura está muy extendido el uso del término Teorema en este contexto. Siguiendo las costumbres, aquí también llamaremos Teorema Duro de Lefschetz a la interpretación de la propiedad en el contexto más general de álgebras graduadas.

CAPÍTULO 1

Geometría combinatoria: definiciones, propiedades y resultados

Índice

1.1. Politopos, poliedros y complejos poliedrales	3
1.2. f-vectores y h-vectores	5
1.3. La Conjetura g	7
1.3.1. El Teorema g para politopos	8
1.3.2. El Teorema g para esferas simpliciales	9

Vamos a repasar algunas nociones básicas de geometría combinatoria, necesarias para enunciar y demostrar el Teorema g . Una referencia básica para la mayor parte de este Capítulo es el libro de Günter M. Ziegler [Zie95].

1.1. Politopos, poliedros y complejos poliedrales

Comenzamos recordando las nociones de combinaciones lineales, afines y convexas. Dados $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^d$, decimos que x es combinación lineal de x_1, \dots, x_n si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Tenemos los siguientes tipos especiales de combinaciones lineales:

- Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, decimos que x es una combinación afín.
- Si $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$, decimos que x es una combinación cónica o positiva.
- Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$, decimos que x es una combinación convexa.

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^d$, decimos que S es un subespacio lineal (resp. subespacio afín, cono, subconjunto convexo) de \mathbb{R}^d si es cerrado bajo combinaciones lineales (resp. afines, cónicas, convexas). Denotaremos por $L(S)$, $\text{aff}(S)$, $\text{pos}(S)$ y $\text{conv}(S)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales, afines, positivas y convexas de vectores en S , respectivamente. Tenemos que $L(S)$ (resp. $\text{aff}(S)$, $\text{pos}(S)$, $\text{conv}(S)$) es el subespacio lineal (resp. subespacio afín, cono, subconjunto convexo) de \mathbb{R}^d más pequeño que contiene a S , y lo llamamos subespacio lineal generado por S (resp. subespacio afín generado por S , cono generado por S , envolvente convexa de S).

Consideramos en \mathbb{R}^d la topología usual, y dado $S \subseteq \mathbb{R}^d$ denotamos por $\text{int}(S)$ a su interior y por $\text{relint}(S)$ a su interior relativo en el subespacio $\text{aff}(S)$ (con la topología de subespacio).

Un *politopo* (convexo) en \mathbb{R}^d es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d , $\text{conv}(x_1, \dots, x_n)$. Un *poliedro* en \mathbb{R}^d es la intersección de un número finito de semiespacios afines de \mathbb{R}^d ; esto es, el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{cases}$$

Tenemos la siguiente relación entre politopos y poliedros:

Teorema 1.1.1 (Minkowski, Weil). *P es un politopo si y sólo si es un poliedro acotado.*

Esta equivalencia nos permite definir un politopo bien como envolvente convexa de un conjunto finito de puntos o bien a través de desigualdades lineales.

Sea P un poliedro. Decimos que una desigualdad $ax \leq b$ es *válida en P* si se satisface para todo punto $x \in P$. Si $ax \leq b$ es válida en P , llamamos *cara de P* a la intersección $P \cap \{ax = b\}$. De las desigualdades válidas $0x \leq 0$ y $0x \leq 1$, vemos que P y \emptyset siempre son caras de P . Toda cara F de un poliedro P es otro poliedro, y las caras de F son las caras de P que están contenidas en F . Si F y G son caras de P , entonces $F \cap G$ es otra cara de P , y una cara común de F y G .

Dado un poliedro P en \mathbb{R}^d , llamamos *dimensión de P* a la dimensión de $\text{aff}(P)$. Como toda cara F de P es otro poliedro, tiene definida una dimensión. A las caras de dimensión 0 las llamamos *vértices*, a las de dimensión 1 *aristas*, y a las de codimensión 1 ($\dim P - \dim F = 1$) *facetas*.

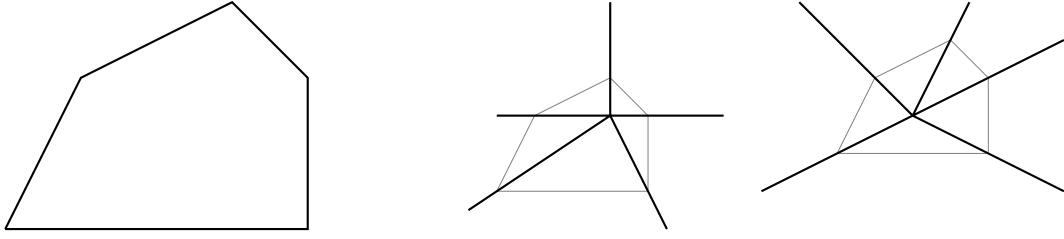


FIGURA 1. Un pentágono y dos abanicos de caras (respecto de dos orígenes distintos).

Si P es un politopo y V es el conjunto de sus vértices, tenemos que $P = \text{conv}(V)$, y si podemos escribir $P = \text{conv}(S)$ con S un conjunto finito de puntos, entonces es $V \subseteq S$. Además, si F es una cara de P , el conjunto de vértices de F es $F \cap V$.

Todo politopo P tiene un dual P^* cuyas caras de dimensión i están en biyección con las caras de codimensión i de P . Además, esta relación invierte las relaciones de contención.

Un n -símplice es la envolvente convexa de $n+1$ puntos afínmente independientes. Decimos que un politopo P de dimensión d es simplicial si todas las caras de P son símlices o, equivalentemente, si todas sus facetas son $(d-1)$ -símlices; y que es simple si todo vértice de P es la intersección de d facetas. El dual de un símplex es otro símplex, y el dual de un politopo simplicial es un politopo simple.

Un complejo simplicial (geométrico) K en \mathbb{R}^d es una colección finita de símlices de \mathbb{R}^d que verifica las siguientes propiedades:

- i) Dado $P \in K$, todas las caras de P están en K (en particular, si K no es el complejo vacío, $\emptyset \in K$).
- ii) Dados $P, Q \in K$, $P \cap Q$ es una cara común a los dos símlices.

Llamamos dimensión de K al máximo de las dimensiones de P para $P \in K$, y espacio subyacente de K a $|K| = \cup_{P \in K} P \subseteq \mathbb{R}^d$. Un ejemplo básico de complejo simplicial es el conjunto de todas las caras propias de un politopo P , lo llamamos complejo borde de P y denotamos por ∂P .

Si en vez de una familia de símlices, consideramos una familia de poliedros que verifique esas mismas propiedades, decimos que K es un complejo poliedral. Hay un tipo de complejos poliedrales de especial importancia en este trabajo, los abanicos.

Al principio de la sección llamábamos cono a cualquier conjunto cerrado por combinaciones lineales positivas; por ejemplo, el “cono usual” $\{z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}$ es un cono. Vamos a restringir la definición. Un cono poliedral en \mathbb{R}^d es la intersección de un número finito de semiespacios vectoriales de \mathbb{R}^d o, equivalentemente, el cono $\text{pos}(S)$ generado por un conjunto finito de vectores $S \subseteq \mathbb{R}^d$. A partir de ahora, llamaremos cono a un cono poliedral. Un cono K es simplicial si es $K = \text{pos}(v_1, \dots, v_m)$ con $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$ linealmente independientes.

Un abanico Σ en \mathbb{R}^d es un complejo poliedral cuyas caras son todas conos. En ocasiones, denotaremos por $\Sigma(i)$ al conjunto de conos de dimensión i de Σ . Decimos que Σ es simplicial si todos sus conos son simpliciales, y completo si $|\Sigma| = \mathbb{R}^d$. Dado un cono $\tau \in \Sigma$, definimos la estrella de τ en Σ , $\text{st}(\tau)$, como el conjunto de todos los conos de Σ que contienen a τ , y la estrella cerrada de τ en Σ , $\overline{\text{st}}(\tau)$, como el conjunto de conos que son caras de algún cono de la estrella (o, equivalentemente, el subabanico de Σ más pequeño que contiene a los conos maximales que contienen a τ); esto es,

$$\text{st}(\tau) := \{\sigma \in \Sigma : \tau \subseteq \sigma\},$$

$$\overline{\text{st}}(\tau) := \{\sigma \in \Sigma : \exists \gamma \in \Sigma, \tau \subseteq \gamma, \sigma \subseteq \gamma\}.$$

Dado un politopo P de dimensión d en \mathbb{R}^d , se pueden definir dos abanicos: su abanico de caras $\mathcal{F}(P)$ y su abanico normal $\mathcal{N}(P)$.

Si $0 \in \text{int}(P)$, el abanico de caras de P es

$$\mathcal{F}(P) = \{\text{pos}(F) : F \in \partial P\},$$

el abanico cuyos conos son los generados por las distintas caras propias de P . Notemos que, aunque su combinatoria no cambia por traslaciones, sí lo hace su geometría. Para el abanico normal de P , consideramos en primer lugar el funcional soporte de P ,

$$\begin{aligned} H_P : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \max\{v \cdot x : x \in P\}. \end{aligned}$$

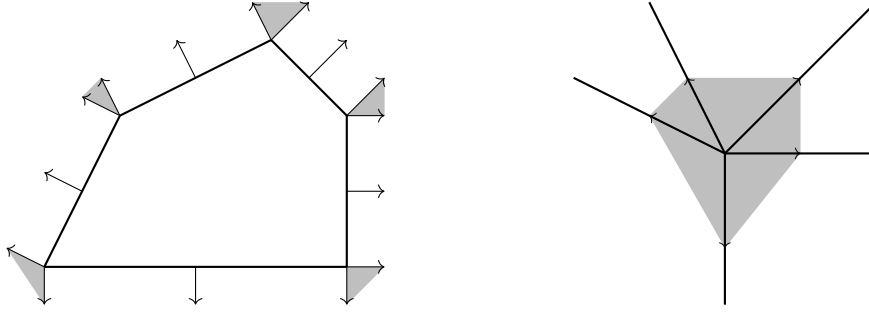


FIGURA 2. A la izquierda, el mismo pentágono con el cono normal de cada una de sus caras; a la derecha, su abanico normal.

Dado un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^d$, la cara de P en dirección v es el conjunto de puntos de P en los que se alcanza el máximo en H_P , esto es,

$$P_v = \{x \in P : v \cdot x = H_P(v)\}.$$

Ahora, el cono normal a la cara F en P es el conjunto de vectores v tales que la cara P_v contiene a F ,

$$\mathcal{N}(F, P) = \{v \in \mathbb{R}^d : F \subseteq P_v\};$$

en particular, si P es d -dimensional y F es una faceta de P , existe $u \in \mathbb{R}^d$ tal que $\mathcal{N}(F, P) = \text{pos}(u)$. Decimos que u es un vector normal exterior a F en P , y denotamos por $u_{F,P}$ al vector normal unitario de F en P . Si P tiene dimensión menor que d , definimos $u_{F,P}$ en el subespacio $\text{aff}(P)$.

El abanico normal de P es el conjunto de todos los conos normales a caras no vacías de P ,

$$\mathcal{N}(P) = \{\mathcal{N}(F, P) : F \text{ cara de } P, F \neq \emptyset\}.$$

El abanico normal de un politopo también es, en cierto sentido, dual del politopo. Las caras de dimensión i de P están en biyección con los conos de codimensión i de $\mathcal{N}(P)$, y la biyección invierte contenidos. Además, el abanico normal de un politopo simple es simplicial: si una cara F de dimensión i es la intersección de $d - i$ facetas, el cono normal a F en P es el cono simplicial generado por los vectores normales a las $d - i$ facetas.

Por último, todo abanico Σ admite una subdivisión simplicial Σ' (esto es, un abanico simplicial tal que, para todo cono $\sigma' \in \Sigma'$, existe otro cono $\sigma \in \Sigma$ con $\sigma' \subseteq \sigma$).

1.2. f -vectores y h -vectores

Dado un politopo de dimensión d , P , definimos su f -vector $f(P) = (f_{-1}(P), \dots, f_{d-1}(P))$ como el vector en \mathbb{N}^d donde $f_i(P)$ es el número de caras de dimensión i de P , para $-1 \leq i \leq d-1$ ($f_{-1}(P) = 1$ para todo P porque \emptyset es la única cara de dimensión -1 de cualquier politopo). Como la única cara de dimensión d de P es P , escribiremos también $f_d(P) = 1$.

Dado un d -politopo simplicial P , definimos su h -vector $h(P) = (h_0(P), \dots, h_d(P))$ como

$$h_k(P) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}(P).$$

Así, $h(P)$ es una transformación lineal entera de $f(P)$. Esta transformación es invertible en \mathbb{Z} , siendo

$$f_{k-1}(P) = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i(P).$$

Para verlo, basta ver que, si definimos el polinomio $F_P(X)$ como

$$F_P(X) := \sum_{i=0}^d f_{d-i-1}(P) X^i = f_{-1}(P) X^d + \dots + f_{d-2}(P) X + f_{d-1}(P)$$

y $H_P(X) := F_P(X-1)$, entonces

$$H_P(X) = \sum_{i=0}^d h_{d-i}(P) X^i = h_0(P) X^d + \dots + h_{d-1}(P) X + h_d(P).$$

Como las relaciones que definen el h -vector de P a partir de su f -vector no son positivas, podría parecer que en el h -vector de algún politopo simplicial pueden aparecer entradas negativas. Como veremos, esto no es así.

Dado un politopo simplicial P , consideramos su politopo dual P^* , que es simple. Definimos el polinomio $\bar{F}_{P^*}(X) := \sum_{i=0}^d f_i(P^*)X^i$. Como $f_i(P^*) = f_{d-i-1}(P)$, tenemos que

$$\bar{F}_{P^*}(X) = \sum_{i=0}^d f_i(P^*)X^i = \sum_{i=0}^d f_{d-i-1}(P)X^i = F_P(X).$$

Por tanto, el polinomio $\bar{H}_{P^*}(X) := \bar{F}_{P^*}(X-1)$ es exactamente $\bar{H}_{P^*}(X) = H_P(X)$.

Teorema 1.2.1 (Ecuaciones de Dehn-Sommerville). *Si P es un politopo simplicial, $h_i(P) = h_{d-i}(P)$. Además, $h_i(P) \geq 0$ para todo i .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q = P^*$ el politopo dual de P , que es simple. Sea v un vector que no sea normal a ninguna arista y diagonal de Q ; esto es, tal que $v \cdot x \neq v \cdot y$ para todo par de vértices $x, y \in Q$ distintos. Consideremos la familia de semiespacios afines

$$H^-(v, t) := \{x \in \mathbb{R}^d : v \cdot x \leq t\}.$$

A medida que t crece y $H^-(v, t)$ atraviesa Q , el semiespacio va absorbiendo los vértices de Q de uno en uno (por la condición impuesta sobre v). Supongamos que Q tiene n vértices que entran en $H^-(v, t)$ en el orden x_1, \dots, x_n , y sea $t_i = v \cdot x_i$.

Decimos que el vértice x_i de Q es de tipo m (con respecto a v) si exactamente m de las aristas de Q que lo contienen están en $H^-(v, t_i)$. Así, al pasar por t_i , $H^-(v, t)$ adquiere este vértice, una m -cara de Q y todas sus k -caras (con $k < m$) que contienen a v_i ; esto es, $\binom{m}{k}$ k -caras, $k \leq m$.

Como no estamos contando ninguna cara dos veces, podemos descomponer \bar{F}_Q como $\bar{F}_Q = \Delta_1 \bar{F}_Q + \dots + \Delta_n \bar{F}_Q$ con

$$\Delta_i \bar{F}_Q(X) = \sum_{k=0}^{m_i} \binom{m_i}{k} X^k = (X+1)^{m_i},$$

donde m_i es el tipo del vértice x_i con respecto a v . Así,

$$H_P(X) = \bar{F}_Q(X-1) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \bar{F}_Q(X-1) = \sum_{i=1}^n (X-1)^{m_i},$$

y $h_k(P)$ es el número de vértices de tipo k con respecto a v , luego es un número no negativo. Ahora, si x es un vértice de tipo k con respecto a v , es de tipo $d-k$ con respecto a $-v$, y tiene que ser $h_k(P) = h_{d-k}(P)$. \square

OBSERVACIÓN 1.2.2. Tenemos $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ ecuaciones de Dehn-Sommerville. Si escribimos la primera, $h_0(P) = h_d(P)$, en función del f -vector de P , tenemos que

$$1 = \sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}(P) = (-1)^{d-1} \left(-1 + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) \right) = (-1)^{d-1} (-1 + \chi(\partial P)),$$

donde $\chi(\partial P)$ es la característica de Euler del complejo simplicial ∂P . Es decir, la primera ecuación de Dehn-Sommerville nos dice que, para todo politopo simplicial de dimensión d , $\chi(\partial P) = 1 + (-1)^{d-1}$.

Consideramos en \mathbb{R}^d la curva de momentos, dada por la parametrización

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto (t, t^2, \dots, t^d). \end{aligned}$$

Dados $t_1 < \dots < t_d \in \mathbb{R}$, llamamos politopo cíclico de dimensión d con n vértices a $C(d, n) := \text{conv}(c(t_1), \dots, c(t_n))$. El politopo cíclico cumple una serie de propiedades, relacionadas con el determinante de la matriz de VanderMonde: los n puntos de la curva están en posición general (no hay $d+1$ de ellos afínmente dependientes), luego el politopo es simplicial, y la combinatoria del politopo no depende de los parámetros escogidos. Esto último es lo que nos permite hablar de “el” politopo cíclico. Estos politopos son los que más caras tienen, en el sentido siguiente:

Teorema 1.2.3 (Teorema de la Cota Superior). *Para todo politopo simplicial P de dimensión d con n vértices se tiene, para $-1 \leq i \leq d-1$,*

$$f_i(P) \leq f_i(C(d, n)).$$

Equivalentemente, en términos del h -vector,

$$h_i(P) \leq h_i(C(d, n)) = \binom{n-d-1+i}{i}$$

para $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

DEMOSTRACIÓN. Una prueba se puede encontrar en [Ewa96, Sección II.5]. \square

1.3. La Conjetura g

En [McM71], McMullen conjetura una caracterización de los vectores en \mathbb{N}^d que pueden ser el f -vector de algún politopo simplicial de dimensión d . Para ello, define el g -vector de un politopo simplicial como $g(P) = (g_0(P), \dots, g_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}(P))$ con $g_k(P) = h_k(P) - h_{k-1}(P)$ (con $g_0(P) = h_0(P) = 1$) o, directamente a través del f -vector de P , como

$$g_k(P) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i+1}{d-k+1} f_{i-1}(P)$$

(en el artículo se define originalmente con índices desde -1 hasta $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$). En particular, $g_0(P) = \binom{d+1}{d+1} f_{-1}(P) = 1$. Estas relaciones son invertibles en \mathbb{Z} , de forma que se puede escribir el f -vector de P en términos de su g -vector: por ejemplo, como $h_{d-k} = h_k = g_0 + g_1 + \dots + g_k$ para $k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, basta sustituir en la expresión del f -vector en términos del h -vector. Por tanto, cada una de las tres expresiones determina unívocamente las otras 2.

Dados a y j enteros positivos, definimos la j -representación canónica de a como la descomposición

$$a = \binom{c_j}{j} + \binom{c_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{c_i}{i}$$

con $i \geq 1$, $c_j > c_{j-1} > \dots > c_i$.

Lema 1.3.1. *Dados a y j enteros positivos, siempre existe una j -representación canónica de a , y además, es única.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrarlo por inducción en j . Para $j = 1$, está claro que existe una única j -representación canónica: basta tomar $a_1 = a$.

Para $j > 1$, sea c_j el mayor entero c tal que $\binom{c}{j} \leq a$. Sea $a' = a - \binom{c_j}{j}$. Si $a' = 0$, ya está. Si no, sean c_{j-1}, \dots, c_i los coeficientes de la $(j-1)$ -representación canónica de a' (que existe y es única por hipótesis de inducción).

Para ver que la sucesión c_j, c_{j-1}, \dots, c_i define una j -representación canónica de a , basta ver que $c_j > c_{j-1}$. Si no fuera así, tendríamos

$$a = a' + \binom{c_j}{j} \geq \binom{c_{j-1}}{j-1} + \binom{c_j}{j} \geq \binom{c_j}{j-1} + \binom{c_j}{j} = \binom{c_j+1}{j},$$

lo cual contradice la elección de c_j .

Para ver la unicidad, sean d_j, \dots, d_k los coeficientes de otra j -representación de a . Está claro que no puede ser $d_j > c_j$, ya que $\binom{c_j+1}{j} > a$. Si fuese $d_j < c_j$, entonces tendríamos que $a'' := a - \binom{d_j}{j} \geq \binom{c_j}{j} - \binom{d_j}{j} \geq \binom{c_j-1}{j-1}$. Pero entonces, en la $(j-1)$ -representación de a'' tendríamos $d_{j-1} \geq c_j - 1 \geq d_j$, contradicción. Por tanto, es $d_j = c_j$, $a' = a - \binom{c_j}{j} = a - \binom{d_j}{j}$ y tanto c_{j-1}, \dots, c_i como d_{j-1}, \dots, d_k son los coeficientes de una $(j-1)$ -representación canónica de a' . Como tal representación es única, es $i = k$ y $c_n = d_n$. \square

Si la j -representación canónica de a es

$$a = \binom{c_j}{j} + \binom{c_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{c_i}{i},$$

definimos la pseudopotencia j -ésima de a como

$$a^{(j)} = \binom{c_j+1}{j+1} + \binom{c_{j-1}+1}{j} + \dots + \binom{c_i+1}{i+1}.$$

Conjetura 1.3.2 (Conjetura g , [McM71]). *El vector $(f_{-1}, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ con $f_{-1} = 1$ es el f -vector de un politopo simplicial de dimensión d si y sólo si sus correspondientes h -vector y g -vector satisfacen*

- i) $h_k = h_{d-k}$ para $0 \leq k \leq d$;
- ii) $h_k \leq h_{k+1}$ para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$;

iii) $g_{k+1} \leq g_k^{\binom{k}{2}}$ para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$.

A las condiciones (i), (ii) y (iii) se las suele llamar condiciones de McMullen. La primera de ellas son las ecuaciones de Dehn-Sommerville, que ya hemos visto que tiene que cumplir cualquier politopo simplicial. La segunda, que se puede reescribir como $g_k \geq 0$, es la conocida como Conjetura de la Cota Inferior Generalizada (cf. [McMW71]). La tercera es mucho más distinta a las anteriores, ya que las desigualdades no son lineales. Sin embargo, como se indica en ese mismo artículo, estas desigualdades implican el Teorema de la Cota Superior para politopos simpliciales, y se prueban para casos con pocos vértices ($v \leq d + 3$). Vamos a dar una interpretación algebraica de esta última condición, manifestada de forma explícita por primera vez por R. P. Stanley ([Sta91]).

Llamamos multicomplejo a un conjunto de monomios Γ en las variables X_1, \dots, X_n tal que, si $u \in \Gamma$ y $v|u$, entonces $v \in \Gamma$, y definimos el f -vector de un multicomplejo Γ como el vector que cuenta el número de monomios de cada grado que hay en Γ . Si Γ no es el multicomplejo vacío, es $f_0(\Gamma) = 1$. Tenemos el siguiente resultado, debido a F. S. Macaulay en [Mac27].

Teorema 1.3.3. *Un vector (n_0, \dots, n_m) es el f -vector de algún multicomplejo (no vacío) si y sólo si es no negativo, $n_0 = 1$ y verifica la condición (iii).*

A un vector (n_0, \dots, n_m) que verifica lo anterior lo llamamos M -vector. Sobre la prueba del resultado anterior, el autor dice: “This proof of the theorem [...] is given only to place it on record. It is too long and complicated to provide any but the most tedious reading”. Invitamos al lector a que compruebe que tiene razón.

R. P. Stanley recupera este resultado y lo interpreta de la siguiente forma en [Sta91].

Teorema 1.3.4. *Un vector (n_0, \dots, n_m) es un M -vector si y sólo si existe un álgebra conmutativa graduada $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots \oplus R_m$ sobre un cuerpo $K = R_0$, generada como álgebra por R_1 , de forma que la función de Hilbert $H(R, k) := \dim_K R_k$ está dada por $H(R, k) = n_k$.*

Tenemos, por tanto, una interpretación algebraica de (iii). Además, con las notaciones del Teorema anterior, es siempre $n_k = \dim_K R_k \geq 0$. Por tanto, podemos reescribir la Conjetura g como: un vector (f_{-1}, \dots, f_{d-1}) con $f_{-1} = 1$ es el f -vector de un politopo simplicial de dimensión d si y sólo si $h_k = h_{d-k}$ para $0 \leq k \leq d$ y existe un álgebra conmutativa graduada $R = R_0 \oplus \dots \oplus R_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ sobre un cuerpo $K = R_0$ generada por R_1 de forma que $g_k = H(R, k)$.

1.3.1. El Teorema g para politopos. Diez años más tarde de la publicación de la Conjetura g , se publicaron dos artículos, [Sta80] y [BL81]; en el primero de ellos se demuestra que las condiciones de McMullen son necesarias, esto es, que el f -vector de todo politopo simplicial las cumple, y en el segundo se demuestra que son suficientes, construyendo, para todo vector que cumple las condiciones, un politopo simplicial cuyo f -vector es el dado.

Teorema 1.3.5 (Teorema g , [Sta80], [BL81]). *La Conjetura g es cierta: un vector (f_{-1}, \dots, f_{d-1}) con $f_{-1} = 1$ es el f -vector de un politopo simplicial si y sólo si verifica las condiciones de McMullen.*

Vamos a comentar las dos pruebas. La suficiencia de las condiciones pasa por construir un politopo simplicial con el f -vector dado, usando propiedades del politopo cíclico.

Esencialmente, la construcción toma un politopo cíclico en dimensión $d+1$ con $g_1 + d + 1$ vértices y, tomando ciertas facetas de la envolvente convexa inferior (a partir de una cierta lista ordenada de monomios en $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ variables), construye un shelling de una bola simplicial cuyo complejo borde tiene el h -vector deseado.

Por otra parte, la prueba de R. P. Stanley de la necesidad de las condiciones de McMullen sigue una filosofía completamente distinta. Vamos a reproducir los argumentos que aparecen en [Sta80], aunque no estamos en posición de explicarlos. Una buena referencia para estudiar la construcción de variedades tóricas y su cohomología es [Ewa96].

Dado P un politopo de dimensión d en \mathbb{R}^d , su f -vector no cambia vía traslaciones ni pequeñas perturbaciones de los vértices. Por tanto, podemos suponer que el origen está en el interior de P , y que todos sus vértices tienen coordenadas racionales. Construimos, a partir de este politopo, su abanico de caras Σ , que es un abanico simplicial completo.

El abanico Σ tiene asociada una variedad compleja completa X_Σ , que además es proyectiva. El anillo de cohomología $A = H^\bullet(X_\Sigma, \mathbb{Q})$ de la variedad X_Σ con coeficientes en \mathbb{Q} satisface $H^{2i+1}(X_\Sigma, \mathbb{Q}) = 0$, luego es conmutativo y admite la graduación $A_i = H^{2i}(X_\Sigma, \mathbb{Q})$. Así, A es una \mathbb{Q} -álgebra generada por A_1 con $\dim_{\mathbb{Q}} A_i = h_i(P)$ ([Ewa96, VIII, Teorema 2.1]).

Ahora, por un resultado de Joseph H. M. Steenbrink ([Ste77, Theorem 1.13]), X_Σ satisface el Teorema Duro de Lefschetz, esto es, existe $\omega \in H^2(X_\Sigma, \mathbb{Q}) = A_1$ tal que, para $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, la aplicación $A_i \rightarrow A_{d-i}$

dada por la multiplicación por ω^{d-2i} es una biyección. En particular, la aplicación $A_i \rightarrow A_{i+1}$ dada por la multiplicación por ω es inyectiva para $0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ y sobreyectiva para $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \leq i \leq d-1$. Así, sea I el ideal de A generado por ω y $A_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1}$, y definimos $R = A/I$. I es un ideal graduado con $I_i = I \cap A_i$. Como todos los elementos de I son de grado positivo, $I_0 = 0$. Para $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, tenemos que los únicos elementos de grado i en I son los de ωA_{i-1} , que, como la multiplicación por ω es inyectiva para grado $i-1$, tiene dimensión $\dim_{\mathbb{Q}} I_i = \dim_{\mathbb{Q}} A_{i-1}$. Por último, para $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq d$, tenemos que $I_i = A_i$, ya que $I_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1} = A_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1}$ y la multiplicación por ω en A_i es sobreyectiva. En resumen, tenemos

$$R = R_0 \oplus \dots \oplus R_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \oplus R_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1} \oplus \dots \oplus R_d$$

con $R_i = A_i/A_i = 0$ para $i \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ y la función de Hilbert de R es

$$H(R, k) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}} A_0 = h_0(P) = g_0(P) & \text{si } k = 0, \\ \dim_{\mathbb{Q}} A_k/I_k = \dim_{\mathbb{Q}} A_k - \dim_{\mathbb{Q}} A_{k-1} = h_k(P) - h_{k-1}(P) = g_k(P) & \text{si } 1 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor. \end{cases}$$

El vector $g(P)$ es por tanto un M -vector y se verifican las condiciones de McMullen.

1.3.2. El Teorema g para esferas simpliciales. En el mismo artículo [McM71], el autor se plantea extender la Conjetura g a triangulaciones de esferas en base a dos razones: para $d = 4, 5$, los f vectores de las triangulaciones de la $(d-1)$ -esfera son exactamente los que satisfacen las condiciones de McMullen ([Wal70]), y toda triangulación de la $(d-1)$ -esfera con $\leq d+3$ vértices es isomorfa al complejo borde de algún politopo simplicial d -dimensional ([Man72]). A pesar de no hacerlo de forma explícita, McMullen dice lo siguiente: “We might therefore be led to suppose that the conjecture should properly apply to triangulated spheres, rather than to simplicial polytopes. However, there are fundamental differences between triangulated $(d-1)$ -spheres and boundary complexes of simplicial d -polytopes. [...] We should therefore, perhaps, be wary of extending the conjecture to triangulated spheres.” De hecho, el número de esferas trianguladas es mucho mayor que el de esferas politopales (cf. [Kal88]): si $s_d(n)$ es el número de tipos combinatorios de triangulaciones de la d -esfera con n vértices y $p_d(n)$ es el número de ellas que son politopales, se tiene que

$$\log p_d(n) \in \Theta(n \log n), \quad \log s_d(n) \in \Omega\left(n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}\right), \quad \forall d \geq 3.$$

Después de publicarse la demostración de la necesidad de las condiciones de McMullen para politopos simpliciales, aparecen otras dos demostraciones que evitan usar resultados de geometría algebraica. La primera es debida al propio McMullen, que aparece en [McM93] y [McM96], en la que la información del h -vector de un politopo simple P está codificada en el álgebra de politopos de P ([McM89]). La segunda, más reciente, se debe a B. Fleming y K. Karu en [FK10], donde el h -vector de P aparece reflejado en el álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos en el abanico normal de P .

En los dos casos, la demostración pasa por demostrar que se verifica el Teorema Duro de Lefschetz. De hecho, es lo único que se necesita para demostrar la Conjetura para esferas trianguladas, ya que toda triangulación de una esfera tiene un álgebra que codifica su h -vector:

Sea Δ un complejo simplicial abstracto con n vértices (esto es, un multicomplejo finito en las variables X_1, \dots, X_n en el que los monomios que aparecen son todos libres de cuadrados). Consideramos el anillo de polinomios $S = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. El ideal de Stanley-Reisner de Δ es

$$I_{\Delta} := (\{X_{i_1} \cdots X_{i_n} \notin \Delta\}),$$

esto es, el ideal de S generado por los monomios libres de cuadrados que no pertenecen a Δ , y su anillo de Stanley-Reisner es

$$S_{\Delta} := S/I_{\Delta}.$$

Este anillo es una \mathbb{R} -álgebra graduada generada por $(S_{\Delta})_1$. Si Δ es homeomorfo a una esfera, existe una lista de formas lineales (un sistema lineal de parámetros) $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_d)$ en S de forma que el anillo

$$H_{\Theta}(\Delta) = S_{\Delta}/\Theta S_{\Delta}$$

es una \mathbb{R} -álgebra graduada cuya función de Hilbert viene dada por el h -vector de Δ . Por tanto, basta encontrar un elemento que verifique el Teorema Duro de Lefschetz para completar la demostración de la Conjetura g .

Hay que esperar hasta 2018 para que aparezca una tal demostración. Es debida a K. Adiprasito en [Adi18]. En ella, demuestra que, para cierto tipo de realizaciones geométricas del complejo simplicial abstracto asociado a la triangulación de una esfera (dadas por sistemas lineales de parámetros genéricos), la \mathbb{R} -álgebra resultante verifica el Teorema Duro de Lefschetz.

El artículo en el que aparece la demostración es bastante técnico y tiene una extensión considerable. Además, aunque todo parece indicar que es correcto, algunas de las técnicas que allí aparecen no están del todo verificadas por la comunidad matemática; de hecho, todavía es un preprint. Por ello, el estudio de esta demostración está fuera del alcance de un Trabajo de Fin de Máster, pero estudiarla y profundizar en su comprensión es una continuación directa de este trabajo.

CAPÍTULO 2

El álgebra de politopos

Índice

	2.1. Grupos abelianos y valoraciones	11
	2.2. Estructura del álgebra de politopos I: el morfismo de dilatación	13
	2.3. Estructura del álgebra de politopos II: logaritmo y exponencial	17
	2.4. Álgebras de politopos y de pesos de un politopo simple	20

Dado un espacio X y una familia de subespacios $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a los que llamaremos admisibles, y dado un grupo abeliano G , una valoración geométrica en (X, \mathcal{S}) con valores en G es una aplicación $\phi : \mathcal{S} \rightarrow G$ tal que para todo par de subespacios admisibles A y B , si $A \cup B$ y $A \cap B$ también son admisibles, entonces $\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B)$ y, si \emptyset es admisible, entonces $\phi(\emptyset) = 0$. En nuestro caso, el conjunto X va a ser \mathbb{R}^d y la familia \mathcal{S} el conjunto de politopos en \mathbb{R}^d . Un ejemplo de valoración para esta familia es el volumen.

El Problema Tercero de Hilbert preguntaba si dados dos politopos del mismo volumen, es siempre posible descomponer el primero de forma que las componentes se puedan juntar para formar el segundo. La respuesta, dada por Max Dehn, es negativa. Para demostrarlo, introdujo los invariantes de Dehn, que son valoraciones reales en el conjunto de los 3-politopos. Así, demuestra que dos politopos que verifiquen la propiedad de equidisectabilidad del Problema tienen el mismo invariante; sin embargo, los 3-cubos tienen siempre invariante cero, mientras que los tetraedros no.

El invariante de Dehn es una valoración simple: los politopos que no son de dimensión máxima tienen valoración nula. Entre otros autores, McMullen se plantea estudiar valoraciones estrechamente relacionadas con el volumen pero que solo sean nulas para el politopo vacío. Surge así el álgebra de politopos, objeto de estudio de este Capítulo.

2.1. Grupos abelianos y valoraciones

Denotamos por \mathcal{P} al conjunto de todos los politopos en \mathbb{R}^d . Consideramos el grupo abeliano libre Π con un generador $[P]$ por cada politopo $P \in \mathcal{P}$ bajo las relaciones

- (V) $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \cup Q \in \mathcal{P}$,
- (T) $[P + t] = [P]$ para todo $P \in \mathcal{P}$ y todo $t \in \mathbb{R}^d$,

y $[\emptyset] = 0$. Siguiendo [McM89], vamos a dotar a Π de una operación de multiplicación que va a inducir una estructura de “casi” \mathbb{R} -álgebra graduada. Empecemos dando sentido a esta definición:

Definición 2.1.1. *Dado G un grupo abeliano, una aplicación $\phi : \mathcal{P} \rightarrow G$ es una valoración (geométrica) si $\phi(\emptyset) = 0$ y verifica*

- (V) $\phi(P \cup Q) + \phi(P \cap Q) = \phi(P) + \phi(Q)$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \cup Q \in \mathcal{P}$.

Decimos que ϕ es una valoración invariante por traslaciones si es una valoración que además verifica

- (T) $\phi(P + t) = \phi(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}$ y todo $t \in \mathbb{R}^n$.

Por tanto, la aplicación $\mathcal{P} \rightarrow \Pi$ dada por $P \mapsto [P]$ es una valoración invariante por traslaciones. De hecho, se verifica la siguiente propiedad:

Proposición 2.1.2. *Dado G un grupo abeliano, una aplicación $\phi : \mathcal{P} \rightarrow G$ es una valoración invariante por traslaciones si y sólo si induce un homomorfismo de grupos de Π en G .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\phi} : \Pi \rightarrow G$ la correspondencia dada por $\bar{\phi}([P]) = \phi(P)$. Es equivalente que ϕ sea una valoración invariante por traslaciones a que $\bar{\phi}$ sea una aplicación bien definida. Por otra parte, en cuanto está bien definida, es trivialmente un homomorfismo de grupos. □

Dado un subconjunto W de V , denotamos por W^\dagger a la función característica de W ,

$$W^\dagger(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in W, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denotemos por $X(\mathcal{P})$ al subgrupo de las funciones $V \rightarrow \mathbb{Z}$ generado por las funciones características P^\dagger de $P \in \mathcal{P}$. Tenemos el siguiente resultado

Lema 2.1.3. *Una aplicación de \mathcal{P} en un grupo abeliano G es una valoración si y sólo si induce un homomorfismo de $X(\mathcal{P})$ en G .*

DEMOSTRACIÓN. Siempre es $A^\dagger + B^\dagger = (A \cup B)^\dagger + (A \cap B)^\dagger$, luego dados $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \cup Q \in \mathcal{P}$, $P^\dagger + Q^\dagger = (P \cup Q)^\dagger + (P \cap Q)^\dagger$ en $X(\mathcal{P})$. Así, como antes, dada una correspondencia $\phi : \mathcal{P} \rightarrow G$, es una valoración si y sólo si la aplicación $\bar{\phi} : X(\mathcal{P}) \rightarrow G$ dada por $\bar{\phi}(P^\dagger) = \phi(P)$ está bien definida; en cuanto está bien definida, es un homomorfismo de grupos. \square

Sea $U(\mathcal{P})$ la familia de uniones finitas de politopos en \mathcal{P} , y sea

$$\bar{U}(\mathcal{P}) := \{A \setminus B : A, B \in U(\mathcal{P})\}.$$

Lema 2.1.4. *Una valoración en \mathcal{P} admite una única extensión a una valoración en $\bar{U}(\mathcal{P})$.*

DEMOSTRACIÓN. Como una valoración en \mathcal{P} induce un homomorfismo en $X(\mathcal{P})$, basta ver que ese homomorfismo se extiende de forma única a funciones características de elementos de $\bar{U}(\mathcal{P})$. Dados $A, B, S \subseteq V$, tenemos las siguientes relaciones de funciones características para la intersección y la unión,

$$(A \cap B)^\dagger = A^\dagger B^\dagger, \quad (V \setminus S)^\dagger = 1 - S^\dagger,$$

y como $A \setminus B = (V \setminus B) \cap A$, tenemos que

$$(A \setminus B)^\dagger = (1 - B^\dagger)A^\dagger = A^\dagger - A^\dagger B^\dagger.$$

Ahora, para la unión finita, tenemos por una parte

$$(V \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n))^\dagger = 1 - (A_1 \cup \dots \cup A_n)^\dagger,$$

y por otra

$$(V \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n))^\dagger = ((V \setminus A_1) \cap \dots \cap (V \setminus A_n))^\dagger = (V \setminus A_1)^\dagger \cdots (V \setminus A_n)^\dagger = (1 - A_1^\dagger) \cdots (1 - A_n^\dagger).$$

Así, para un elemento general de $U(\mathcal{P})$, si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$, tenemos que

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n)^\dagger = 1 - (1 - A_1^\dagger) \cdots (1 - A_n^\dagger),$$

donde, desarrollando el producto, tenemos un elemento de $X(\mathcal{P})$. Ahora, si $A, B \in U(\mathcal{P})$, $(A \setminus B)^\dagger = A^\dagger - A^\dagger B^\dagger$ es también un elemento en $X(\mathcal{P})$. Así, las funciones características de elementos en $\bar{U}(\mathcal{P})$ se corresponden unívocamente con elementos de $X(\mathcal{P})$, y por tanto podemos extender de forma única una valoración $\phi : \mathcal{P} \rightarrow G$ a una valoración de $\bar{U}(\mathcal{P})$ como $\phi(A \setminus B) = \bar{\phi}(A \setminus B)^\dagger$. \square

Hasta ahora hemos hablado siempre de semiespacios queriendo decir semiespacios cerrados y, por ejemplo, hemos visto que todo politopo es un poliedro, esto es, una intersección finita de semiespacios cerrados. En algún momento vamos a trabajar con intersecciones de un número finito de semiespacios, que pueden ser cerrados o abiertos. Los llamamos politopos parcialmente abiertos, y denotamos la familia de los mismos por \mathcal{P}_{po} (del inglés, *partially open*). Como consecuencia del resultado anterior, deducimos lo siguiente.

Corolario 2.1.5. *Una valoración ϕ en \mathcal{P} admite una extensión única a \mathcal{P}_{po} . Además, si $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_{po}$ descomponen $Q \in \mathcal{P}_{po}$, entonces*

$$\phi(Q) = \sum_{j=1}^k \phi(Q_j).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se sigue de que todo elemento de \mathcal{P}_{po} está en $\bar{U}(\mathcal{P})$: si Q es un politopo parcialmente abierto y \bar{Q} es su correspondiente clausura (relativa al espacio afín en el que esté contenido Q), tenemos que Q es \bar{Q} menos algunas de sus caras, esto es, menos una unión finita de politopos. Para la segunda afirmación, por inducción en k : dados $A, B \in \mathcal{P}_{po}$ con $A \cup B \in \mathcal{P}_{po}$, $A \cap B = \emptyset$, como ϕ es una valoración, $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B)$. \square

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado, que admite varias pruebas (cf. [DLRS10, Sección 2.1], por ejemplo).

Lema 2.1.6. *Dado un politopo $P \in \mathcal{P}$, existe un complejo simplicial geométrico en V de forma que su espacio subyacente es P .*

Así, con todo lo anterior, tenemos que

Corolario 2.1.7. *El grupo Π está generado por las clases de los símlices en \mathcal{P} .*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la aplicación $[\cdot] : \mathcal{P} \longrightarrow \Pi$ que lleva cada politopo a su clase es una valoración. Por tanto, se puede extender de forma única a \mathcal{P}_{po} . Dado un politopo P , existe un complejo simplicial cuyo espacio subyacente es P . Por tanto, tomando el interior (relativo) de los símlices del complejo tenemos una descomposición de P en politopos parcialmente abiertos, y $[P]$ es la suma de las clases de estos. \square

2.2. Estructura del álgebra de politopos I: el morfismo de dilatación

Dados dos generadores de Π , $[P]$ y $[Q]$, definimos su producto como $[P][Q] = [P + Q]$, donde

$$P + Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\}$$

es la suma de Minkowski de P y Q . Veamos que esta operación induce en Π estructura de anillo.

Proposición 2.2.1. *Π es un anillo conmutativo con unidad.*

DEMOSTRACIÓN. El producto de dos generadores $[P][Q] = [P + Q]$ es conmutativo, y lo podemos extender a Π como $[P]([Q_1] + [Q_2]) = [P][Q_1] + [P][Q_2]$. Esta multiplicación está bien definida en Π : Sean $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$ con $Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{P}$. Es claro que $P + (Q_1 \cup Q_2) = (P + Q_1) \cup (P + Q_2)$. Veamos que $P + (Q_1 \cap Q_2) = (P + Q_1) \cap (P + Q_2)$.

Si $x \in P + (Q_1 \cap Q_2)$, es $x = u + v$ con $u \in P, v \in Q_1 \cap Q_2$, luego x pertenece a $P + Q_1$ y a $P + Q_2$ y, por tanto, a la intersección.

Para la otra contención, si $x \in (P + Q_1) \cap (P + Q_2)$, tenemos que $x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ con $u_1, u_2 \in P, v_1 \in Q_1, v_2 \in Q_2$. Queremos ver que existen $u \in P, v \in Q_1 \cap Q_2$ con $x = u + v$. Sea $\lambda \in [0, 1]$. Como $P, Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{P}$, tenemos que $u_\lambda = (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2 \in P$ y $v_\lambda = (1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2 \in Q_1 \cup Q_2$. Si no existiese λ tal que $v_\lambda \in Q_1 \cap Q_2$, tendríamos que el segmento $[v_1, v_2]$ es la unión de dos cerrados $[v_1, v_2] \cap Q_1$ y $[v_1, v_2] \cap Q_2$ con intersección vacía, lo cual es absurdo porque los segmentos son conexos. Por tanto, existe λ con $v_\lambda \in Q_1 \cap Q_2$ y $x = (1 - \lambda)x + \lambda x = u_\lambda + v_\lambda \in P + (Q_1 \cap Q_2)$.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} [P]([Q_1 \cup Q_2] + [Q_1 \cap Q_2]) &= [P][Q_1 \cup Q_2] + [P][Q_1 \cap Q_2] = \\ &= [P + (Q_1 \cup Q_2)] + [P + (Q_1 \cap Q_2)] = \\ &= [(P + Q_1) \cup (P + Q_2)] + [(P + Q_1) \cap (P + Q_2)] = \\ &= [P + Q_1] + [P + Q_2] = [P][Q_1] + [P][Q_2] = \\ &= [P]([Q_1] + [Q_2]), \end{aligned}$$

con lo que la multiplicación respeta (V) y está bien definida.

Está claro que, por como está definida, verifica la propiedad distributiva. Ahora, por la propiedad (T) de Π , la unidad de Π es $1 = [0] = [t]$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$, ya que $[P][t] = [P + t] = [P]$ para todo $P \in \mathcal{P}$. \square

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la dilatación de razón λ en los generadores de Π como $\Delta(\lambda)[P] = [\lambda P]$. Veamos que esta operación define un endomorfismo en Π . Para ello, veamos el efecto que tiene una aplicación afín entre sendos espacios afines V y W con respecto a los respectivos anillos $\Pi(V)$ y $\Pi(W)$ (denotamos por $\Pi(V)$ al anillo Π con generadores en $\mathcal{P}(V)$, politopos en V).

Teorema 2.2.2. *Sea $\Phi : V \longrightarrow W$ una aplicación afín. Φ induce un homomorfismo de anillos de $\Pi(V)$ en $\Pi(W)$, dado por $\Phi([P]) = [\Phi(P)]$ para $P \in \mathcal{P}(V)$. Además, Φ conmuta con las dilataciones.*

DEMOSTRACIÓN. Si Φ es una aplicación afín, es $\Phi(\cdot) = \Phi_{\text{lin}}(\cdot) + t$ con Φ_{lin} una aplicación lineal y $t \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, podemos suponer que Φ es lineal, ya que, por (T),

$$\Phi([P]) = [\Phi(P)] = [\Phi_{\text{lin}}(P) + t] = [\Phi_{\text{lin}}(P)] = \Phi_{\text{lin}}([P]).$$

Así, sea Φ lineal. Como $\Phi([P + t]) = [\Phi(P + t)] = [\Phi(P) + \Phi(t)] = [\Phi(P)] = \Phi([P])$, Φ es compatible con (T). Ahora, para la compatibilidad con (V), se tiene que $\Phi(P \cup Q) = \Phi(P) \cup \Phi(Q)$ para cualesquiera subconjuntos de V , mientras que si $P, Q \in \mathcal{P}(V)$ con $P \cup Q \in \mathcal{P}(V)$ también se tiene $\Phi(P \cap Q) = \Phi(P) \cap \Phi(Q)$. Así, $\Phi([P \cap Q] + [P \cup Q]) = \Phi([P]) + \Phi([Q])$. Por último, como $\Phi(P + Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)$, $\Phi([P][Q]) = [\Phi(P)][\Phi(Q)]$, y Φ induce un homomorfismo de $\Pi(V)$ en $\Pi(W)$.

La última parte es trivial, ya que $\Phi(\lambda P) = \lambda \Phi(P)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Corolario 2.2.3. *Una aplicación afín $\Phi : V \longrightarrow V$ induce un endomorfismo de Π que conmuta con las dilataciones. En particular, las dilataciones inducen endomorfismos en Π conmutativos entre ellos. Además, la composición de dos dilataciones es la dilatación de factor el producto de los dos.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es inmediata. Para la segunda, basta ver que la dilatación por λ actúa en los generadores de Π como el endomorfismo inducido por la homotecia de razón λ , y por tanto se extiende a un endomorfismo en Π . Por último, como la composición de la homotecia de razón λ con la de razón μ es la homotecia de razón $\lambda\mu$, tenemos que $\Delta(\lambda)\Delta(\mu) = \Delta(\lambda\mu)$. \square

Nuestro objetivo ahora es descomponer el anillo Π en suma directa como

$$\Pi = \Xi_0 \oplus \Xi_1 \oplus \dots \oplus \Xi_d$$

con $\Xi_0 \simeq \mathbb{Z}$. Empecemos por esta parte: como hemos denotado por 1 a $[0] = [t]$, identificamos Ξ_0 con \mathbb{Z} de la forma obvia. Sea Z_1 el subgrupo de Π generado por los elementos de la forma $[P] - 1$ con $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Empezamos con la descomposición siguiente:

Lema 2.2.4. *Como grupo abeliano, Π se descompone como suma directa en $\Pi = \Xi_0 \oplus Z_1$. La proyección de Π en Ξ_0 es la dilatación $\Delta(0)$. Además, Z_1 es un ideal en Π y $z \in Z_1$ si y sólo si $\Delta(0)z = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Un elemento x no nulo de Π se puede expresar como

$$x = \sum_{j=1}^k a_j [P_j] = \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{j=1}^k a_j ([P_j] - 1)$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$ y $P_j \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, luego es $x \in \Xi_0 + Z_1$. Además, $x \in Z_1$ si y sólo si $\sum a_j = 0$, luego la suma es directa.

Si Δ_k es un k -símplice, notemos que $\Delta(0)(\Delta_k)$ depende sólo de k . Podemos dividir Δ_k en dos símlices de dimensión k , Δ_k^1 y Δ_k^2 , con un hiperplano H que separe dos puntos y contenga a los otros $k-1$. Como $\Delta_{k-1} := H \cap \Delta_k$ es un $(k-1)$ -símplice, tenemos que $[\Delta_k^1] + [\Delta_k^2] = [\Delta_k] + [\Delta_{k-1}]$ y, aplicando $\Delta(0)$ y teniendo en cuenta que $\Delta(0)[\Delta_k] = \Delta(0)[\Delta_k^1] = \Delta(0)[\Delta_k^2]$, tenemos que $\Delta(0)[\Delta_k] = \Delta(0)[\Delta_{k-1}]$. Así, $\Delta(0)[\Delta_k] = \Delta(0)1 = 1$ para todo símplex.

La aplicación $[P] \mapsto 1$ coincide con la aplicación $[P] \mapsto \Delta(0)[P]$ en los símlices, que son generadores de Π , y por tanto $\Delta(0)[P] = 1$ para todo politopo $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$.

La caracterización de Z_1 se sigue de lo anterior: $z \in Z_1$ si y sólo si $\Delta(0)z = \sum_j a_j = 0$. Ahora, si $z \in Z$ y $x \in \Pi$, tenemos que $\Delta(0)(xz) = \Delta(0)(x) \cdot \Delta(0)(z) = 0$ y $xz \in Z_1$, con lo que Z_1 es un ideal de Π . \square

Sean $a_0, a_1, \dots, a_k \in V$ con a_1, \dots, a_k linealmente independientes. Entonces, los vectores $a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_k$ son afínmente independientes. Denotamos por $T(a_1, \dots, a_k)$ al k -símplice

$$T(a_1, \dots, a_k) := \text{conv}\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_k\}$$

y consideramos

$$s(a_1, \dots, a_k) = [T(a_1, \dots, a_k)] - [T(a_1, \dots, a_{k-1})], \quad s(\emptyset) = 1.$$

Por la invarianza de traslaciones, como

$$\text{conv}\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_k\} = \text{conv}\{0, a_1, \dots, a_1 + \dots + a_k\} + a_0,$$

$s(a_1, \dots, a_k)$ no depende de a_0 . Así, tomaremos $a_0 = 0$ y $T(a_1, \dots, a_k)$ es el símplex

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \xi_i a_i : 1 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_k \geq 0 \right\}.$$

Lema 2.2.5. *Las clases $s(a_1, \dots, a_k)$ generan Π ; las clases con $k \geq 1$ generan Z_1 .*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que las clases de los símlices generan Π . Además,

$$\sum_{j=0}^k s(a_1, \dots, a_j) = 1 + \sum_{j=1}^k ([T(a_1, \dots, a_j)] - [T(a_1, \dots, a_{j-1})]) = [T(a_1, \dots, a_k)],$$

y toda clase de un símplex es de la forma $[T(a_1, \dots, a_k)]$. Como $\Pi \simeq \mathbb{Z} \oplus Z_1$, la segunda parte es clara. \square

Lema 2.2.6. *Para $\lambda, \mu \geq 0$,*

$$\Delta(\lambda + \mu)s(a_1, \dots, a_k) = \sum_{j=0}^k (\Delta(\lambda)s(a_1, \dots, a_j)) (\Delta(\mu)s(a_{j+1}, \dots, a_k)).$$

DEMOSTRACIÓN. El j -ésimo término de la suma es la clase del politopo parcialmente abierto

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \xi_i a_i : \lambda + \mu \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_j > \mu \geq \xi_{j+1} \geq \dots \geq \xi_k > 0 \right\},$$

y la unión de los mismos es disjunta y es

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \xi_i a_i : \lambda + \mu \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_k > 0 \right\},$$

luego la suma de las clases es la clase de esta unión disjunta, que es $\Delta(\lambda + \mu)s(a_1, \dots, a_k)$. \square

Lema 2.2.7. Para $k \geq 1$ y $n \geq 0$,

$$\Delta(n)s(a_1, \dots, a_k) = \sum_{r=1}^k \binom{n}{r} z_r,$$

donde

$$z_r = \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_r=k} \prod_{i=1}^r s(a_{j_{i-1}+1}, \dots, a_{j_i})$$

es independiente de n .

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en n . Para $n = 1$ está claro, ya que $\Delta(1)s(a_1, \dots, a_k) = s(a_1, \dots, a_k) = z_1$. Supongamos que se cumple para $n - 1$. Tenemos, usando la descomposición del Lema anterior, que

$$\Delta(n)s(a_1, \dots, a_k) = \Delta(n - 1 + 1)s(a_1, \dots, a_k) = \sum_{t=0}^k (\Delta(n - 1)s(a_1, \dots, a_t)) s(a_{t+1}, \dots, a_k).$$

Usando la hipótesis de inducción, tenemos que, para cada $t > 1$,

$$\Delta(n - 1)s(a_1, \dots, a_t) = \sum_{r=1}^t \binom{n-1}{r} z_{r,t}$$

con

$$z_{r,t} = \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_r=t} \prod_{i=1}^r s(a_{j_{i-1}+1}, \dots, a_{j_i}).$$

Así,

$$\Delta(n)s(a_1, \dots, a_k) = s(a_1, \dots, a_k) + \sum_{t=1}^{k-1} \left(\sum_{r=1}^t \binom{n-1}{r} z_{r,t} \right) s(a_{t+1}, \dots, a_k) + \sum_{r=1}^k \binom{n-1}{r} z_{r,k}.$$

Ahora, tenemos que

$$\sum_{t=1}^{k-1} \left(\sum_{r=1}^t \binom{n-1}{r} z_{r,t} \right) s(a_{t+1}, \dots, a_k) = \sum_{r=1}^{k-1} \binom{n-1}{r} \sum_{t=r}^{k-1} z_{r,t} s(a_{t+1}, \dots, a_k),$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{t=r}^{k-1} z_{r,t} s(a_{t+1}, \dots, a_k) &= \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_r=t} \prod_{i=1}^r s(a_{j_{i-1}+1}, \dots, a_{j_i}) s(a_{t+1}, \dots, a_k) \\ &= \sum_{0=j_0 < j_1 < \dots < j_r < j_{r+1}=k} \prod_{i=1}^{r+1} s(a_{j_{i-1}+1}, \dots, a_{j_i}) = z_{r+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $z_{r,k} = z_r$ y $s(a_1, \dots, a_k) = z_1$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta(n)s(a_1, \dots, a_k) &= z_1 + \sum_{r=1}^{k-1} \binom{n-1}{r} z_{r+1} + \sum_{r=1}^k \binom{n-1}{r} z_r \\ &= z_1 + \sum_{r=2}^k \binom{n-1}{r-1} z_r + \sum_{r=1}^k \binom{n-1}{r} z_r \\ &= \left(1 + \binom{n-1}{1} \right) z_1 + \sum_{r=2}^k \left(\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \right) z_r \\ &= \sum_{r=1}^k \binom{n}{r} z_r. \end{aligned}$$

□

Lema 2.2.8. Sea $x \in \Pi$. Existen únicos $y_0 \in \Xi_0$ e $y_1, \dots, y_d \in Z_1$ tales que, para todo entero $n \geq 0$,

$$\Delta(n)x = \sum_{r=0}^d \binom{n}{r} y_r.$$

DEMOSTRACIÓN. La existencia es clara: las clases $s(a_1, \dots, a_k)$ generan Π y cada la dilatación de cada clase con $k \geq 1$ tiene una descomposición de la forma $\sum_{r=1}^d \binom{n}{r} z_r$ (para $k = 0$ es $s(\emptyset) = 1$ y $\Delta(n)1 = 1$). Para la unicidad, para cada $n \geq 0$ la matriz $(n+1) \times (n+1)$ con $a_{ij} = \binom{i}{j}$ es invertible sobre \mathbb{Z} (ya que es triangular con 1 en la diagonal). La matriz inversa se calcula fácilmente, y tenemos que

$$y_r = \sum_{n=0}^r (-1)^{r-n} \binom{r}{n} \Delta(n)x.$$

□

Si ponemos $y_r = 0$ para $r > d$, tenemos el siguiente

Corolario 2.2.9. Para $r > d$, la aplicación

$$\sum_{n=0}^r (-1)^{r-n} \binom{r}{n} \Delta(n)$$

es la aplicación nula.

Sea $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Tenemos que, para todo $n \geq 0$,

$$\Delta(n)[P] = [nP] = [P]^n = (1 + ([P] - 1))^n = 1 + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} ([P] - 1)^r, \quad (*)$$

luego es $y_r = ([P] - 1)^r$ en la expresión del Lema anterior y, por tanto,

Corolario 2.2.10. Dado $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, es $([P] - 1)^r = 0$ para $r > d$.

Sea Z_r el subgrupo de Z_1 generado por los elementos de la forma $([P] - 1)^j$ con $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$ y $j \geq r$. Si ponemos $Z_0 = \Pi$, tenemos la filtración

$$\Pi = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \dots \supseteq Z_d \supseteq Z_{d+1} = 0.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $\Delta(\lambda)([P] - 1)^j = ([\lambda P] - 1)^j$ por ser $\Delta(\lambda)$ isomorfismo, luego $\Delta(\lambda)Z_r \subseteq Z_r$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $r \geq 0$.

Podemos escribir $(*)$ como

$$\Delta(n)([P] - 1) = \sum_{k=1}^d \binom{n}{k} ([P] - 1)^k. \quad (**)$$

Lema 2.2.11. Dado $x \in Z_r$, $\Delta(n)x - n^r x \in Z_{r+1}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que se cumple para los generadores $([P] - 1)^j$ con $j \geq r$, elevando $(**)$ a la j . □

Con todo lo anterior, podemos dotar a Z_1 de estructura de espacio vectorial.

Teorema 2.2.12. Z_1 es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} .

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que Z_1 es únicamente divisible, esto es, que dados $x \in Z_1$ y $m \geq 2$, existe un único $y \in Z_1$ de forma que $x = my$.

Empecemos comprobando que Z_1 es libre de torsión. Sea $x \in Z_1$ un elemento de torsión, tenemos que $nx = 0$ para algún $n \geq 2$. Veamos que $x \in Z_r$ para todo r por inducción. Si $x \in Z_{r-1}$, entonces

$$\Delta(n)x = \Delta(n)x - n^{r-1}nx \in Z_r.$$

Así,

$$\Delta(n^{-1})\Delta(n)x = x \in \Delta(n^{-1})Z_r \subseteq Z_r$$

y, por tanto, $x \in Z_{d+1} = \{0\}$, el único elemento de torsión es el 0.

Veamos ahora que Z_1 es divisible. Sean $x \in Z_1$ y $m \geq 2$. Si $x \in Z_d$, $\Delta(m)x - m^d x \in Z_{d+1}$ y $\Delta(m)x = m^d x$, por lo que

$$x = \Delta(m)\Delta(m^{-1})x = m^d \Delta(m^{-1})x = m(m^{d-1} \Delta(m^{-1})x).$$

Si $x \in Z_r$ con $r < d$, $\Delta(m)x - m^r x = x'$ con $x \in Z_{r+1}$; supongamos que existe $y \in Z_{r+1}$ con $x' = my$. Entonces,

$$x = \Delta(m)\Delta(m^{-1})x = \Delta(m^{-1})(m^r x + x') = \Delta(m^{-1})(m^r x + my) = m(\Delta(m^{-1})(m^{r-1}x + y)).$$

Así, concluimos que para todo $x \in Z_1$ y todo $m \geq 2$ existe $y \in Z_1$ con $x = my$. Ahora, si existieran y_1 e y_2 con $x = my_1 = my_2$, sería $m(y_1 - y_2) = 0$ e $y_1 - y_2$ es un elemento de torsión, luego es 0 e $y_1 = y_2$. Denotamos al único y tal que $x = my$ como $m^{-1}y$ o $\frac{1}{m}y$.

Una vez hemos visto que Z_1 es únicamente divisible, la estructura de \mathbb{Q} -espacio vectorial es natural. Definimos $\frac{n}{m}x = n(m^{-1}x)$. Si $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2}$, tenemos que

$$m_1 m_2 (n_1(m_1^{-1}x) - n_2(m_2^{-1}x)) = n_1 m_2 m_1 (m_1^{-1}x) - n_2 m_1 m_2 (m_2^{-1}x) = n_1 m_2 x - n_2 m_1 x = 0,$$

luego es

$$\frac{n_1}{m_1}x = n_1(m_1^{-1}x) = n_2(m_2^{-1}x) = \frac{n_2}{m_2}x.$$

El resto de propiedades se prueba de manera similar. \square

2.3. Estructura del álgebra de politopos II: logaritmo y exponencial

Sabemos que Z_1 es cerrado por multiplicación; además, si $x, y \in Z_1$, tenemos que $(\frac{n}{m}x)y = \frac{n}{m}(xy)$, ya que

$$m\left(\frac{n}{m}x\right)y = nxy = m\frac{n}{m}(xy).$$

Como Z_1 está generado por elementos nilpotentes, $[P] - 1$ con $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, todo elemento de Z_1 es nilpotente; por tanto, Z_1 es un nil ideal de Π (de hecho, a través de la descomposición $\Pi \simeq \mathbb{Z} \oplus Z_1$, se puede ver que Z_1 es el nilradical de Π).

Así, las series de potencias formales en elementos de Z_1 son, en realidad, polinomios, y por tanto definen elementos en Z_1 . Definimos entonces el “logaritmo” y la “exponencial” de forma usual como

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k, \\ \exp(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} z^k, \end{aligned}$$

(con $z^0 = 1$) para todo $z \in Z_1$.

Lema 2.3.1. *Las aplicaciones \log y \exp son inversas la una de la otra, y satisfacen*

- i) $\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \Pi$ con $\Delta(0)x_1 = \Delta(0)x_2 = 1$;
- ii) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ para $z_1, z_2 \in Z_1$.

DEMOSTRACIÓN. Es trivial a partir de la expresión en serie de potencias formal. \square

En particular, $\log[P]$ está definido para cada $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$; escribiremos

$$\log P := \log(1 + ([P] - 1)) = \sum_{k=1}^d \frac{(-1)^{k-1}}{k} ([P] - 1)^k.$$

Así, $\log[P]$ es el coeficiente de n en $\Delta(n)[P]$ como polinomio en n .

Sea $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \geq 0$. Tenemos que $\Delta(\lambda)\log[P] = \log[\lambda P]$. Si $\lambda = \frac{n}{m}$,

$$\Delta(\lambda)\log P = \lambda \log P.$$

Sea $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, y sea $p = \log P \in Z_1$. Sea $\lambda \geq 0$ racional. Tenemos que

$$[\lambda P] = \Delta(\lambda)[P] = \Delta(\lambda)\exp p = \exp(\Delta(\lambda)p) = \exp(\lambda p) = \sum_{r=0}^d \lambda^r \frac{1}{r!} p^r.$$

Para $r = 1, \dots, d$, definimos el r -ésimo espacio de pesos Ξ_r como el subgrupo de Π generado por todos los elementos p^r con $p = \log P$ para $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Así, tenemos lo siguiente.

Lema 2.3.2. *Podemos descomponer Π en suma directa como*

$$\Pi = \bigoplus_{r=0}^d \Xi_r.$$

Es más, $x \in \Xi_r$ si y sólo si para algún $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, se tiene $\Delta(\lambda)x = \lambda^r x$.

DEMOSTRACIÓN. Como $[P] = \exp(\log P)$, tenemos que los generadores $[P]$ de Π se escriben como sumas de potencias de $p = \log P$, y por tanto todo elemento de Π se descompone como suma de elementos en los Ξ_r . Veamos que la descomposición de esta forma es única. De la definición, si $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \geq 0$, tenemos que

$$\Delta(\lambda)p^r = (\Delta(\lambda)p)^r = (\lambda p)^r = \lambda^r p^r$$

para $p = \log P$ con $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Así, si $x \in \Xi_r$, es $x = \sum_{i=1}^s a_i p_i^r$ y

$$\Delta(\lambda)x = \sum_{i=1}^s a_i \Delta(\lambda)p_i^r = \sum_{i=1}^s a_i \lambda^r p_i^r = \lambda^r \sum_{i=1}^s a_i p_i^r = \lambda^r x.$$

Sea $0 = x_0 + x_1 + \dots + x_d$ con $x_r \in \Xi_r$. De lo anterior, tenemos que

$$0 = \Delta(\lambda) \sum_{r=0}^d x_r = \sum_{r=0}^d \lambda^r x_r$$

para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \geq 0$. Como $\Pi = \Xi_0 \oplus Z_1$, tiene que ser $x_0 = 0$ y, como la matriz de VanderMonde $VdM(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ es invertible para $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ distintos, tiene que ser también $x_1 = \dots = x_d = 0$. Así, la suma es directa.

Ahora, sea $x \in \Pi$ con $\lambda = \frac{n}{m} > 0$, $m \neq n$ de forma que $\Delta(\lambda)x = \lambda^r x$. Descomponiendo x como $x = x_0 + x_1 + \dots + x_d$, $x_r \in \Xi_r$, y aplicando $\Delta(\lambda)$, tenemos

$$\sum_{k=0}^d \lambda^r x_k = \lambda^r x = \Delta(\lambda)x = \sum_{k=0}^d \lambda^k x_k.$$

Si multiplicamos por m^r y restamos, obtenemos

$$\sum_{k=0}^d (m^r \lambda^r - m^r \lambda^k) x_k = \sum_{0 \leq k \leq d, k \neq d} (m^r \lambda^r - m^r \lambda^k) x_k = \sum_{0 \leq k \leq d, k \neq d} (n^r - m^r \lambda^k) x_k = 0$$

con $n^r - m^r \lambda^k \neq 0$. Por tanto, tiene que ser $x_k = 0$ para $k \neq r$ y es $x = x_r \in \Xi_r$. \square

Por tanto, hemos visto que el álgebra de politopos Π es, efectivamente, casi un álgebra sobre \mathbb{Q} . Recogemos en el siguiente Teorema todo lo que sabemos hasta ahora sobre su estructura:

Teorema 2.3.3. *El álgebra de politopos Π es casi un álgebra graduada sobre \mathbb{Q} , en el sentido siguiente:*

i) como grupo abeliano, Π admite una descomposición en suma directa

$$\Pi = \bigoplus_{r=0}^d \Xi_r;$$

ii) bajo multiplicación, se tiene

$$\Xi_r \cdot \Xi_s = \Xi_{r+s}$$

para $r, s = 0, \dots, d$ (con $\Xi_r = \{0\}$ para $r > d$);

iii) $\Xi_0 \simeq \mathbb{Z}$ y, para $r = 1, \dots, d$, Ξ_r es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} .

Además, las dilataciones $\Delta(\lambda)$ son endomorfismos de álgebra de Π , y para $r = 0, \dots, d$, si $x \in \Xi_r$ y $\lambda \geq 0$, entonces

$$\Delta(\lambda)x = \lambda^r x.$$

Por último, si un elemento $x \in \Pi$ verifica que $\Delta(\lambda)x = \lambda^r x$ para algún $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ y algún $r = 0, \dots, d$, entonces $x \in \Xi_r$.

DEMOSTRACIÓN. Lo único que falta por probar es (ii). Si $r, s = 0, \dots, d$ y $x \in \Xi_r$, $y \in \Xi_s$, tomando $\lambda = 2$ en la última afirmación, tenemos que

$$\Delta(2)(xy) = (\Delta(2)x)(\Delta(2)y) = 2^r x 2^s y = 2^{r+s} xy$$

y $xy \in \Xi_{r+s}$, luego $\Xi_r \cdot \Xi_s \subseteq \Xi_{r+s}$. Por otra parte, como los generadores de Ξ_{r+s} son $p^{r+s} = p^r p^s$ con $p = \log P$, $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, tenemos que $p^{r+s} \in \Xi_r \cdot \Xi_s$ y, por tanto, $\Xi_{r+s} \subseteq \Xi_r \cdot \Xi_s$. \square

El Teorema 2.3.3 es también cierto cambiando \mathbb{Q} por \mathbb{R} (o por cualquier cuerpo ordenable \mathbb{F}). No vamos a reproducir la demostración completa, pero sí a indicar algunas partes. En primer lugar, tenemos un isomorfismo entre Ξ_d y \mathbb{R} dado por el volumen usual.

Lema 2.3.4. *Como grupos abelianos, se tiene $\Xi_d \simeq \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que, si $x \in \Pi$, $x = \sum_{r=0}^d$ con $\Delta(n)x_r = n^r x_r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, los únicos generadores $s(a_1, \dots, a_k)$ de Π que contribuyen a la d -componente de x , x_d , son aquellos para los que $k = d$, ya que en la descomposición del Lema 2.2.7,

$$\Delta(n)s(a_1, \dots, a_k) = \sum_{r=1}^k \binom{n}{r} z_r$$

con

$$z_r = \sum_{0 < j_0 < j_1 < \dots < j_r = k} \prod_{i=1}^r s(a_{j_{i-1}+1}, \dots, a_{j_i}),$$

solo aparece un monomio con el término n^d si $k = d$ para $r = k = d$, en cuyo caso el monomio es

$$\frac{n^d}{d!} z_d = \frac{n^d}{d!} s(a_1) \cdots s(a_d),$$

y $s(a_1, \dots, a_d) = \frac{1}{d!} s(a_1) \cdots s(a_d)$.

Ahora, $s(a_i)$ es la clase del politopo parcialmente abierto $(0, a_i]$, y por tanto $s(a_1) \cdots s(a_d)$ es la clase de

$$\left\{ \sum_{i=1}^d \xi_i a_i : 0 < \xi_i \leq 1, i = 1, \dots, d \right\}.$$

El orden de los a_i es irrelevante, y se puede sustituir a_i por $-a_i$, ya que

$$s(-a_i) = [T(-a_i)] - 1 = [T(-a_i) + a_i] - 1 = [T(a_i)] - 1 = s(a_i).$$

Veamos por último que si $i \neq j$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos sustituir a_i por $a_i + \lambda a_j$. Podemos suponer que $\lambda > 0$. Si q es la clase de

$$\{\xi_i a_i + \xi_j a_j : 0 < \xi_i \leq 1, 0 < \xi_j \leq 1 + \lambda \xi_i\},$$

descomponiendo a través de los semiplanos abiertos

$$\{\xi_i a_i + \xi_j a_j : \xi_j > 1\}$$

y

$$\{\xi_i a_i + \xi_j a_j : \xi_j < \lambda \xi_i\},$$

obtenemos

$$q = s(a_i)s(a_j) + s(a_i, \lambda a_j) = s(a_i, \lambda a_j) + s(a_i + \lambda a_j)s(a_j),$$

luego $s(a_i)s(a_j) = s(a_i + \lambda a_j)s(a_j)$.

Por tanto, fijada una base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de V , tenemos que $s(a_1) \cdots s(a_d) = s(\mu e_1) \cdots s(e_d)$ con $\mu = |\det(a_1, \dots, a_d)|$. Así, la correspondencia

$$s(a_1) \cdots s(a_d) \mapsto |\det(a_1, \dots, a_d)|$$

nos da el isomorfismo $\Xi_d \simeq \mathbb{R}$. □

Veamos también que el primer espacio de pesos Ξ_1 es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Lema 2.3.5. Ξ_1 es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in \Xi_1$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \geq 0$, tenemos que $\Delta(\lambda)(x) = \lambda x$. Por tanto, definimos el producto por escalares en \mathbb{R} extendiendo esta propiedad como

$$\lambda x = \begin{cases} \Delta(\lambda)x & \text{si } \lambda \geq 0, \\ -\Delta(-\lambda)x & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Veamos que esta operación define en Ξ_1 estructura de espacio vectorial. Está claro que $1x = x$ y que $\lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$ por ser $\Delta(\lambda)$ un endomorfismo de anillos. Por otra parte, como $\Delta(\lambda)\Delta(\mu)x = \Delta(\lambda\mu)x$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \Xi_1$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Falta comprobar que $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$. Para $\lambda, \mu \geq 0$, tenemos por el Lema 2.2.6 que

$$\Delta(\lambda + \mu)s(a_1, \dots, a_k) = \sum_{j=0}^k (\Delta(\lambda)s(a_1, \dots, a_j)) (\Delta(\mu)s(a_{j+1}, \dots, a_d)).$$

Todos los sumandos salvo el primero y el último están en $Z_2 = \bigoplus_{r=2}^d \Xi_r$, ya que son producto de dos elementos en Z_1 . Así, si denotamos s_1 para la 1-componente de $s(a_1, \dots, a_k)$, tenemos, para $\lambda, \mu \geq 0$, $\Delta(\lambda + \mu)s_1 = \Delta(\lambda)s_1 + \Delta(\mu)s_1$.

Por tanto, si $\lambda, \mu \geq 0$ o $\lambda, \mu < 0$, se verifica $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$. Falta ver qué ocurre con la multiplicación por $(\lambda + \mu)$ cuando $\lambda\mu < 0$. Si $\lambda + \mu \geq 0$ con $\lambda < 0$, $\mu \geq 0$, tenemos

$$\mu x = \Delta(\mu)x = \Delta((\lambda + \mu) - \lambda)x = \Delta((\lambda + \mu)x) + \Delta(-\lambda)x = (\lambda + \mu)x - \lambda x$$

y $\lambda x + \mu x = (\lambda + \mu)x$. Para el caso $\lambda + \mu < 0$ con $\lambda < 0$, $\mu \geq 0$,

$$\lambda x = -\Delta(-\lambda)x = -\Delta(-(\lambda + \mu) + \mu)x = -\Delta(-(\lambda + \mu))x - \Delta(\mu)x = (\lambda + \mu)x - \mu x$$

y también se verifica la propiedad distributiva en este caso. Esto completa la prueba. \square

No vamos a extender el producto por escalares a todos los espacios de pesos Ξ_r , ya que las demostraciones son algo técnicas y tediosas, y remitimos al lector a las Secciones 9, 10 y 11 de [McM89]. El objetivo es simple: para dotar de estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial a Z_1 , basta comprobar que se verifica la propiedad $(\lambda x)y = x(\lambda y)$ para todo $x, y \in \Xi_1$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, definimos $\lambda(xy)$ como cualquiera de los dos objetos anteriores, que son el mismo, y eso define, por inducción, estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial en todo Z_1 .

2.4. Álgebras de polítopos y de pesos de un polítopo simple

Sea P un polítopo. Como en [McM93] y [McM96], denotamos por $\Pi(P)$ a la subálgebra de Π generada por las clases $[Q]$ de sumandos de Minkowski Q de P ; esto es, polítopos Q tales que existe $Q' \in \mathcal{P}$ con $P = Q + Q'$. Definimos también, para cada r , el r -ésimo espacio de pesos de $\Pi(P)$ como $\Xi_r(P) := \Xi_r \cap \Pi(P)$. Decimos que Q es un sumando débil de Minkowski de P si λQ es un sumando de Minkowski de P para algún $\lambda > 0$. Así, si Q es un sumando débil de P , tenemos que $[\lambda Q] \in \Pi(P)$. Queremos ver que $[Q] \in \Pi(P)$, para lo cual basta ver que las dilataciones son endomorfismos de $\Pi(P)$, ya que $[Q] = \Delta(\lambda^{-1})[\lambda Q]$. Dados $[Q] \in \Pi(P)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, tenemos que $\lambda = n + r$ con $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 1$. Así,

$$\Delta(\lambda)[Q] = [\lambda Q] = [(n + r)Q] = [nQ] + [rQ] = [Q]^n[rQ].$$

Ahora, si $r = 0$, tenemos que $\Delta(\lambda)[Q] = [Q]^n \in \Pi(P)$ y, si $0 < r < 1$, como $Q = rQ + (1 - r)Q$, tenemos que $P = rQ + ((1 - r)Q + Q')$, de forma que $[rQ] \in \Pi(P)$ y $\Delta(\lambda)[Q] \in \Pi(P)$.

Por tanto, $\Pi(P)$ es la subálgebra de Π generada por los sumandos débiles de Minkowski de P . Los sumandos débiles de Minkowski de P son todos los polítopos Q tales que el abanico normal de P es un refinamiento del abanico normal de Q , esto es, todo cono de $\mathcal{N}(P)$ está contenido en algún cono de $\mathcal{N}(Q)$. Así, si $[Q]$ es una clase en $\Pi(P)$, tenemos que H_Q es una función continua que es lineal en cada cono de $\mathcal{N}(P)$, ya que lo es en cada cono de $\mathcal{N}(Q)$.

Por otra parte, asociado a un polítopo P también está su álgebra de pesos, $\Omega(P)$. Para $0 \leq r \leq d$, denotamos por $P[r]$ al conjunto de caras de dimensión r de P . Un r peso en un d -polítopo P es una función real $\omega : P[r] \rightarrow \mathbb{R}$ en las r -caras de P que satisface las relaciones de Minkowski en cada $G \in P[r + 1]$:

$$\sum_{F \in G[r]} \omega(F) u_{F,G} = 0,$$

donde $u_{F,G}$ es el vector normal exterior unitario a F como faceta de G .

Notemos que esta condición se satisface cuando $\omega(F) = \text{vol}_r(F)$ es el r -volumen usual de F ; esto motiva la definición. Adoptaremos la convención de que $\omega(F) = 0$ si ω es un r -peso en P y $F \in P[s]$ con $s \neq r$. Denotamos por $\Omega_r(P)$ al espacio de r -pesos en P (que es, claramente, un espacio vectorial real), y escribimos

$$\Omega(P) := \bigoplus_{r=0}^d \Omega_r(P).$$

Veamos algunos casos particulares: si $r = 0$, ω es una función que toma un valor para cada vértice. Para una arista $e = \{x, y\}$ tenemos que $u_{x,e} = (x - y)/|x - y|$ y $u_{y,e} = (y - x)/|x - y|$, de forma que la relación de Minkowski en esta arista es

$$\omega(x) \frac{x - y}{|x - y|} + \omega(y) \frac{y - x}{|x - y|} = (x - y) \frac{\omega(x) - \omega(y)}{|x - y|} = 0$$

y tiene que ser $\omega(x) = \omega(y)$. Como todo par de vértices de un polítopo está unido por un camino de aristas, tiene que ser $\omega(x) = \omega(y)$ para todo par de vértices de P , y $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_0(P) = 1 = h_0(P)$.

Si $r = d - 1$ y P es un d -polítopo con n facetas, entonces $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_{d-1}(P) = n - d = h_1(P)$. Para verlo, basta elegir una base de \mathbb{R}^d de entre todas las normales exteriores de P y asignar los pesos $\omega(F)$ arbitrariamente a las facetas F cuyas normales no pertenecen a esta base. Así, si $F_1, \dots, F_d, F_{d+1}, \dots, F_n$

son las facetas con normales $u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_n$ y seleccionamos la base $\{u_1, \dots, u_d\}$, tenemos que $-(\omega(F_{d+1})u_{d+1} + \dots + \omega(F_n)u_n) \in \mathbb{R}^d$ y existen $\omega(F_1), \dots, \omega(F_d)$ únicos de forma que

$$\sum_{i=1}^d \omega(F_i)u_i = - \sum_{i=d+1}^n \omega(F_i)u_i \implies \sum_{i=1}^n \omega(F_i)u_i = 0$$

y ω es un $(d-1)$ peso que queda unívocamente determinado por $n-d$ parámetros.

Por último, si P es un d -politopo, $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_d(P) = 1 = h_d(P)$, ya que P es la única d -cara de sí mismo y no hay relaciones de Minkowski.

De hecho, si P es un politopo simple, se tiene que $\Omega_k(P)$ es isomorfo a $\Xi_k(P)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial para $1 \leq k \leq d$, ambos de dimensión $h_k(P)$, y se puede definir en $\Omega(P)$ una multiplicación que le dota de estructura de \mathbb{R} -álgebra. Con todo esto, McMullen completa en [McM93] y [McM96] una demostración de su Conjetura g sin usar resultados de geometría algebraica. No vamos a reproducir esta prueba, pero remitimos al lector interesado a los dos artículos citados.

CAPÍTULO 3

La estructura del álgebra de politopos

Índice

	3.1. Cohomología de haces en abanicos	23
	3.2. Funciones polinomiales y exponenciales por conos	29
	3.3. Relación con el álgebra de politopos	37

Este Capítulo está dedicado a estudiar las álgebras de funciones continuas polinomiales y exponenciales en abanicos simpliciales, siguiendo el artículo de M. Brion [Bri97]. Para el caso polinomial, la estructura del álgebra se puede estudiar a partir de la cohomología de haces en abanicos simpliciales, mientras que para el caso exponencial, el estudio es por inducción en el número de conos maximales del abanico. Finalmente, relacionamos las dos álgebras a través del desarrollo de Taylor de las funciones exponenciales por conos. El objetivo último del Capítulo es recuperar el Teorema 1 de [McM89] sobre la estructura del álgebra de politopos Π .

3.1. Cohomología de haces en abanicos

Definición 3.1.1. Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^d . Un haz \mathcal{F} en Σ es una colección de grupos abelianos $(\mathcal{F}_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ y morfismos (restricciones) $\rho_{\sigma\tau} : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\tau$ (con $\sigma \in \Sigma$, τ cara de σ) tales que

- i) $\rho_{\sigma\sigma} : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\sigma$ es la identidad para todo $\sigma \in \Sigma$,
- ii) $\rho_{\sigma_2\sigma_3} \circ \rho_{\sigma_1\sigma_2} = \rho_{\sigma_1\sigma_3}$ siempre que $\sigma_1 \in \Sigma$, σ_2 cara de σ_1 , σ_3 cara de σ_2 .

OBSERVACIÓN 3.1.2. Un prehaz \mathcal{F} en un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es una colección de grupos abelianos $(\mathcal{F}_U)_{U \in \mathcal{T}}$ y morfismos de restricción $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_V$ (con $U, V \in \mathcal{T}$, $V \subseteq U$), de forma que

- i) $\rho_{U,U} : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_U$ es la identidad para todo $U \in \mathcal{T}$,
- ii) $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$ siempre que $U, V, W \in \mathcal{T}$, $W \subseteq V \subseteq U$.

A los elementos de \mathcal{F}_U se les llama secciones de \mathcal{F} sobre U , y una sección global es un elemento de \mathcal{F}_X . Un prehaz \mathcal{F} en (X, \mathcal{T}) es un haz si además verifica

- i) Si (U_i) es un recubrimiento abierto de un abierto U y $x, y \in \mathcal{F}_U$ son tales que $\rho_{U,U_i}(x) = \rho_{U,U_i}(y)$ para todo i , entonces $x = y$;
- ii) Si (U_i) es un recubrimiento abierto de U y si, para cada i , existe una sección $x_i \in \mathcal{F}_{U_i}$ de forma que, para todo par de abiertos abiertos U_i, U_j , se tiene que $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(x_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(x_j)$, entonces existe una sección de \mathcal{F} sobre U de forma que $x_i = \rho_{U,U_i}(x)$ para todo i .

Así, si consideramos el espacio topológico (Σ, \mathcal{T}) donde \mathcal{T} es el conjunto de subabanicos de Σ , tenemos que un haz \mathcal{F} en Σ como en la Definición anterior induce un prehaz en el espacio topológico (Σ, \mathcal{T}) que, además, es un haz. Viene dado por

$$\mathcal{F}_\Gamma := \{(f_\sigma)_{\sigma \in \Gamma} : f_\sigma \in \mathcal{F}_\sigma, \rho_{\sigma\tau}(f_\sigma) = f_\tau \ \forall \tau \subset \sigma\},$$

y las restricciones $\mathcal{F}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{F}_\Lambda$ dadas como la suma de las restricciones del haz \mathcal{F} en Σ .

OBSERVACIÓN 3.1.3. Si los grupos del haz \mathcal{F} en Σ se pueden ver como objetos de una categoría \mathcal{C} distinta a la de grupos (como anillos o espacios vectoriales), decimos que \mathcal{F} tiene valores en \mathcal{C} si las restricciones son morfismos entre objetos de \mathcal{C} . En particular, vamos a estar interesados en el caso de que \mathcal{F}_σ sean espacios vectoriales y las restricciones aplicaciones lineales.

Dados dos haces \mathcal{F} y \mathcal{G} en Σ con restricciones respectivas $\rho_{\sigma\tau}$ y $\tilde{\rho}_{\sigma\tau}$, un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una colección de morfismos $\varphi_\sigma : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{G}_\sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma$, de forma que los morfismos son compatibles

con las restricciones; esto es, dados $\sigma, \tau \in \Sigma$, $\tau \subset \sigma$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\sigma & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & \mathcal{G}_\sigma \\ \rho_{\sigma\tau} \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho}_{\sigma\tau} \\ \mathcal{F}_\tau & \xrightarrow{\varphi_\tau} & \mathcal{G}_\tau \end{array}$$

Dado un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, podemos definir los haces imagen $\text{im } \varphi$ y núcleo $\ker \varphi$: el haz imagen (resp. núcleo) está formado por los grupos abelianos $(\text{im } \varphi)_\sigma = \text{im } \varphi_\sigma \subset \mathcal{G}_\sigma$ (resp. $(\ker \varphi)_\sigma = \ker \varphi_\sigma \subset \mathcal{F}_\sigma$) y las restricciones $\tilde{\rho}_{\sigma\tau} : \text{im } \varphi_\sigma \rightarrow \text{im } \varphi_\tau$ (resp. $\rho_{\sigma\tau} : \ker \varphi_\sigma \rightarrow \ker \varphi_\tau$). Así, también podemos definir sucesiones exactas cortas de haces: una sucesión de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

es exacta si el haz $\ker \phi$ es 0, los haces $\text{im } \phi$ y $\ker \psi$ son iguales y el haz $\text{im } \psi$ es igual a \mathcal{H} ; esto es, si las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_\sigma \xrightarrow{\phi_\sigma} \mathcal{G}_\sigma \xrightarrow{\psi_\sigma} \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow 0$$

son exactas para cada $\sigma \in \Sigma$.

Todo grupo abeliano F define un haz en Σ , con valor F en todos los conos de Σ y restricciones $\rho_{\sigma\tau} = \text{id}_F$. Llamamos a este haz el haz constante con valores en F , y lo denotamos por F .

Dado un haz \mathcal{F} en un abanico simplicial Σ , podemos asociarle grupos de cohomología $H^i(\mathcal{F})$ como sigue. Dado un cono simplicial $\sigma = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, decimos que dos órdenes de sus vectores generadores son equivalentes si uno se obtiene a partir del otro a través de una permutación par. Si $\dim \sigma = m > 1$, existen dos clases de equivalencia bajo esta relación; cada una es una orientación en σ . Decimos que σ es un cono simplicial orientado si elegimos una orientación para σ , y denotamos por $[v_1, \dots, v_m]$ al cono simplicial orientado por el orden de los vectores generadores $v_1 < \dots < v_m$. También, denotamos por $-[v_1, \dots, v_m]$ a la orientación contraria.

Así, decimos que Σ es un abanico simplicial orientado si elegimos una orientación para cada cono de Σ , con la restricción siguiente: fijamos una base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de V , y si $\sigma = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$ es un cono simplicial de dimensión d , su orientación va a estar dada por $v_{\alpha(1)} < \dots < v_{\alpha(d)}$ de forma que

$$\det(v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(d)}) > 0$$

(está claro que esto define una orientación, ya que una permutación par de las columnas no cambia el determinante).

Dado $\sigma = [v_1, \dots, v_m]$ un cono simplicial orientado y τ_j la faceta generada por los vectores $\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m\}$, la orientación de σ induce una orientación en τ_j dada por $(-1)^{j+1}[v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m]$.

Definimos el i -ésimo grupo de cocadenas del haz \mathcal{F} como

$$C^i(\mathcal{F}) := \bigoplus_{\sigma \in \Sigma(d-i)} \mathcal{F}_\sigma,$$

y el i -ésimo operador coborde $\delta^i : C^i(\mathcal{F}) \rightarrow C^{i+1}(\mathcal{F})$ como la suma directa de las aplicaciones

$$\sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+1} \rho_{\sigma\tau_j} : \mathcal{F}_\sigma \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Sigma(d-i-1), \tau \subset \sigma} \mathcal{F}_\tau$$

para cada $\sigma \in \Sigma(d-i)$. Tenemos que $\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0$: para $i+1 < d$, dado $\sigma \in \Sigma(d-i)$ y dado $x \in \mathcal{F}_\sigma$, tenemos que

$$\delta^i(x) = \sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+1} \rho_{\sigma\tau_j}(x).$$

Ahora, si $1 \leq k \leq j-1$, tenemos que

$$\tau_{jk} = (-1)^{k+1}[v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{d-i}]$$

y, si $j+1 \leq k \leq d-i$,

$$\tau_{jk} = (-1)^k[v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{d-i}].$$

Así, dado $y \in \mathcal{F}_{\tau_j}$, tenemos que

$$\delta^{i+1}(y) = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k \rho_{\tau_j\tau_{jk}}(y) + \sum_{k=j+1}^{d-i} (-1)^{k+1} \rho_{\tau_j\tau_{jk}}(y).$$

Por tanto, para $x \in F_\sigma$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\delta^{i+1} \circ \delta^i)(x) &= \delta^{i+1} \left(\sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+1} \rho_{\sigma\tau_j}(x) \right) = \sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+1} \delta^{i+1} (\rho_{\sigma\tau_j}(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+1} \left(\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \rho_{\tau_j\tau_{jk}}(\rho_{\sigma\tau_j}(x)) + \sum_{k=j+1}^{d-i} (-1)^k \rho_{\tau_j\tau_{jk}}(\rho_{\sigma\tau_j}(x)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{d-i} (-1)^{j+k} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \rho_{\sigma\tau_{jk}}(x) - \sum_{k=j+1}^{d-i} \rho_{\sigma\tau_{jk}}(x) \right). \end{aligned}$$

Ahora, dados $m, n \in \{1, \dots, d-i\}$ con $m \neq n$, digamos $m > n$, el sumando de la imagen de $(\delta^{i+1} \circ \delta^i)(x)$ que contribuye a $\mathcal{F}_{\tau_{mn}}$ es, cuando $j = m, k = n$ y $j = n, k = m$,

$$(-1)^{m+n} \rho_{\sigma\tau_{mn}}(x) + (-1)^{n+m} (-\rho_{\sigma\tau_{nm}}(x)) = 0.$$

Así, $(\delta^{i+1} \circ \delta^i)(\mathcal{F}_\sigma) = 0$ y

$$(\delta^{i+1} \circ \delta^i)(C^i(\mathcal{F})) = (\delta^{i+1} \circ \delta^i) \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma(d-i)} \mathcal{F}_\sigma \right) = \sum_{\sigma \in \Sigma(d-i)} (\delta^{i+1} \circ \delta^i)(\mathcal{F}_\sigma) = 0.$$

Ver que $\delta^{d-1} \circ \delta^{d-2} = 0$ es trivial, teniendo en cuenta que, si $y \in \mathcal{F}_\tau$ para $\tau \in \Sigma(1)$, $\delta^{d-1}(y) = \rho_{\tau 0}(y)$. Como para $i = -1$ e $i = d+1$ es $C^i(\mathcal{F}) = 0$ por ser $\Sigma(d-i) = \emptyset$, tenemos el complejo de cocadenas

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{i-1}} C^i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^i} C^{i+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \dots \xrightarrow{\delta^{d-1}} C^d(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^d} 0$$

Definición 3.1.4. Con las notaciones anteriores, sea $i = 0, \dots, d$. Definimos los grupos i -ésimos de cociclos $Z^i(\mathcal{F}) := \ker(\delta^i)$ y de cobordes $B^i(\mathcal{F}) := \text{im}(\delta^{i-1})$. Como $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$, tenemos que $B^i(\mathcal{F}) \subseteq Z^i(\mathcal{F})$ y definimos el i -ésimo grupo de cohomología como el cociente

$$H^i(\mathcal{F}) := Z^i(\mathcal{F})/B^i(\mathcal{F}).$$

Para $i = d$, como δ^d es la aplicación nula, $H^d(\mathcal{F}) = C^d(\mathcal{F})/B^d(\mathcal{F})$, el conúcleo de δ^{d-1} . Para $i = 0$, como $B^0(\mathcal{F}) = 0$, tenemos que $H^0(\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{F})$. Veamos una caracterización de $H^0(\mathcal{F})$ para un abanico simplicial completo.

Lema 3.1.5. Si Σ es un abanico simplicial completo y \mathcal{F} es un haz en Σ , entonces $H^0(\mathcal{F})$ son los elementos de $C^0(\mathcal{F})$ que coinciden en conos $(d-1)$ -dimensionales de Σ ; esto es, si $\Sigma(d) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, los $x_1 + \dots + x_n$ tales que $\rho_{\sigma_i, \sigma_i \cap \sigma_j}(x_i) = \rho_{\sigma_j, \sigma_i \cap \sigma_j}(x_j)$ para i, j con $\sigma_i \cap \sigma_j \in \Sigma(d-1)$.

DEMOSTRACIÓN. Como Σ es completo, todo cono τ (d_1) -dimensional está contenido en exactamente dos conos maximales. Así, sea $\tau \in \Sigma(d-1)$ con $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$. Si $\sigma_i = \langle v, v_1, \dots, v_{d-1} \rangle$ y $\sigma_j = \langle v', v_1, \dots, v_{d-1} \rangle$, y suponemos que $\det(v, v_1, \dots, v_{d-1}) > 0$, entonces es $\det(v', v_1, \dots, v_{d-1}) < 0$ y las orientaciones de σ_i y σ_j son, respectivamente, $[v, v_1, \dots, v_{d-1}]$ y $[v_1, v', \dots, v_{d-1}]$. Dado $x \in \mathcal{F}_{\sigma_i}$, la contribución de $\delta^0(x)$ a \mathcal{F}_τ es $\rho_{\sigma_i\tau}(x)$, y dado $y \in \mathcal{F}_{\sigma_j}$, la de $\delta^0(y)$ es $-\rho_{\sigma_j\tau}(y)$. Así, la contribución de $\delta^0(x_1 + \dots + x_n)$ a \mathcal{F}_τ es $\rho_{\sigma_i\tau}(x_i) - \rho_{\sigma_j\tau}(x_j)$. Por tanto, $\delta^0(x_1 + \dots + x_n) = 0$ si y sólo si $\rho_{\sigma_i, \sigma_i \cap \sigma_j}(x_i) = \rho_{\sigma_j, \sigma_i \cap \sigma_j}(x_j)$ para i, j con $\sigma_i \cap \sigma_j \in \Sigma(d-1)$. □

Para estudiar la cohomología de haces en abanicos, usaremos las siguientes propiedades:

Lema 3.1.6. i) *Cualquier sucesión exacta corta de haces*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga de grupos de cohomología

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow H^i(\mathcal{F}') \longrightarrow H^i(\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\mathcal{F}'') \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

ii) Si F es un haz constante, entonces $H^d(F) = 0$. Además, para $0 \leq i \leq d-1$, el grupo $H^i(F)$ se identifica con el $(d-i-1)$ -ésimo grupo de homología simplicial de $|\Sigma| \cap S^{d-1}$ con coeficientes en F , $H_{d-i-1}(|\Sigma| \cap S^{d-1}; F)$, donde S^{d-1} es la esfera unidad de \mathbb{R}^d .

DEMOSTRACIÓN. (i) La sucesión exacta corta de haces induce sucesiones exactas cortas en los correspondientes grupos abelianos, y por tanto un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C^{i-1}(\mathcal{F}') & \longrightarrow & C^{i-1}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{i-1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C^i(\mathcal{F}') & \longrightarrow & C^i(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^i(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{F}') & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{i+1}(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

donde cada fila es una sucesión exacta corta de grupos abelianos, las columnas son los complejos de los respectivos haces y todos los cuadrados son conmutativos por ser las flechas verticales sumas de restricciones. Así, aplicando el Lema del Zigzag, obtenemos la sucesión exacta larga de cohomología.

(ii) Como $\delta^{d-1} : F^r \rightarrow F$ es sobreyectiva, $B^d(F) = C^d(F)$ y $H^d(F) = C^d(F)/C^d(F) = 0$. Por otra parte, intersecando cada cono con S^{d-1} obtenemos una triangulación de la esfera, K , y el complejo $(C^i(F))_{0 \leq i \leq d}$ se identifica con el complejo de cadenas reducido asociado a la homología simplicial de esta triangulación. Efectivamente, tenemos que

$$C^i(F) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma(d-i)} F \simeq \left\{ \sum_{\sigma \in K(d-i-1)} f_\sigma \sigma : f_\sigma \in F \right\} = C_{d-i-1}(K; F),$$

y las aplicaciones $\delta^i : C^i(F) \leftarrow C^{i+1}(F)$ inducen, para $0 \leq i \leq d-2$, operadores borde $\partial_{d-i-1} : C_{d-i-1}(K; F) \rightarrow C_{d-i-2}(K; F)$ dadas por

$$\sigma = [v_1, \dots, v_{d-i-1}] \mapsto \sum_{j=1}^{d-i-1} (-1)^{j+1} \tau_j = \sum_{j=1}^{d-i-1} (-1)^{j+1} [v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{d-i-1}],$$

y para $i = d-1$, un operador $\psi : C_0(K; F) \rightarrow F$ dado por $\psi(v) = 1$. Así, recuperamos el complejo de cadenas reducido

$$C_{d-1}(K; F) \xrightarrow{\partial_{d-1}} C_{d-2}(K; F) \xrightarrow{\partial_{d-2}} \dots \rightarrow C_{d-i}(K; F) \xrightarrow{\partial_{d-i}} C_{d-i-1}(K; F) \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K; F) \xrightarrow{\psi} F \rightarrow 0$$

□

En particular, nos va a interesar el caso en el que Σ es un abanico completo, y tenemos que K es la triangulación de una esfera. Así, la cohomología del haz constante F en un abanico simplicial completo Σ (en \mathbb{R}^d con $d \geq 2$) es $H^i(F) = \check{H}_{d-i-1}(K; F) = 0$ para $i \geq 1$, y $H^0(F) = \check{H}_{d-1}(K; F) = F$. En general, para todas las propiedades básicas sobre homología simplicial que usemos aquí, una referencia básica es [Hat02].

Notemos que si tenemos dos haces de K -espacios vectoriales, su producto tensorial sobre K sigue siendo un haz. Así, para cualquier haz de \mathbb{R} -espacios vectoriales \mathcal{F} y para $n \geq 0$, tenemos los haces $S^n \mathcal{F}$ y $\wedge^n \mathcal{F}$ (potencias simétrica y exterior n -simas).

Sea Σ un abanico en $V = \mathbb{R}^d$, y sea V^* el dual de V sobre \mathbb{R} . Para $\sigma \in \Sigma$, denotamos por σ^\perp al conjunto de todos los $f \in V^*$ que se anulan idénticamente en σ . La asignación $\sigma \mapsto \sigma^\perp$ define un haz \mathcal{F} de \mathbb{R} -espacios vectoriales en Σ , siendo las restricciones $\rho_{\sigma\tau} : \mathcal{F}_\sigma \rightarrow \mathcal{F}_\tau$ las inclusiones $\sigma^\perp \hookrightarrow \tau^\perp$.

Definición 3.1.7. Sea σ un abanico simplicial. Para $j \geq 0$, sea $\wedge^j \mathcal{F}$ la j -ésima potencia exterior de \mathcal{F} . Definimos los espacios de Hodge de Σ como

$$H^{i,j}(\Sigma) = H^i(\wedge^j \mathcal{F}).$$

Teorema 3.1.8. Con las notaciones anteriores, se tiene:

- i) $H^{i,j}(\Sigma) = 0$ para $i < j$.
- ii) Si $|\Sigma|$ no está contenido en ningún hiperplano, $H^{d,j}(\Sigma) = 0$ para $j < d$ y $H^{d,d}(\Sigma) \simeq \mathbb{R}$.
- iii) Si Σ es completo, $H^{i,j}(\Sigma) = 0$ para $i > j$.

DEMOSTRACIÓN. (i) La dimensión de \mathcal{F}_σ es la codimensión de σ , luego $\wedge^j \mathcal{F}_\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \Sigma(d-i)$ con $i < j$. Así, si $i < j$, tenemos que $C^i(\wedge^j \mathcal{F}) = 0$, con lo que $H^{i,j}(\Sigma) = H^i(\wedge^j \mathcal{F}) = 0$.

(ii) $H^{d,j}(\Sigma)$ es el conúcleo de la aplicación

$$\delta : \bigoplus_{\sigma \in \Sigma(1)} \wedge^j \sigma^\perp \longrightarrow \wedge^j V^*,$$

la suma directa de las inclusiones $\wedge^j \sigma^\perp \longrightarrow \wedge^j V^*$. Si $j = d$, $\wedge^d \sigma^\perp = 0$ y $\delta = 0$, con lo que $H^{d,d}(\Sigma) = \wedge^d V^* \simeq \mathbb{R}$. Para $j < d$, veamos que δ es sobreyectiva. Como $|\Sigma|$ no está contenido en ningún hiperplano, existen d vectores linealmente independientes e_1, \dots, e_d en V de forma que cada e_i genera un rayo $\sigma \in \Sigma(1)$, σ_i . Así, una base de $\wedge^j \sigma_i^\perp$ es el producto exterior de cualesquiera j vectores en $\{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ distintos de e_i^* . Por tanto, la aplicación

$$\bigoplus_{i=1}^d \wedge^j \sigma_i^\perp \longrightarrow \wedge^j V^*,$$

es sobreyectiva, y también lo es δ .

(iii) Dado un cono $\sigma \in \Sigma$, tenemos la sucesión exacta corta de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \sigma^\perp \longrightarrow V^* \longrightarrow \bigoplus_{\tau \in \sigma(1)} L(\tau)^* \longrightarrow 0,$$

donde $L(\tau)$ es la recta generada por el rayo τ de σ ; la aplicación $V^* \longrightarrow L(\tau)^*$ es la restricción de V^* al dual de $L(\tau)$. Si σ es el cono simplicial generado por los vectores v_1, \dots, v_r , y construimos una base v_1, \dots, v_d de V a partir de ellos, sea x_1, \dots, x_d su base dual. Si τ_i es el rayo generado por v_i , $1 \leq i \leq r$, podemos identificar $L(\tau_i)^* = \langle x_i \rangle$ con \mathbb{R} , y la aplicación $V^* \longrightarrow L(\tau_i)^*$ con la aplicación $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ que lleva x_i al 1 y el resto de vectores de la base al 0. Así, escribimos la sucesión exacta corta anterior como

$$0 \longrightarrow \sigma^\perp \longrightarrow V^* \longrightarrow \bigoplus_{\tau \in \sigma(1)} \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Dado $\tau \in \Sigma(1)$ y cualquier $\sigma \in \Sigma$, escribimos

$$K(\tau)_\sigma = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \tau \subset \sigma, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de forma que $K(\tau)$ es un haz: el haz constante \mathbb{R} en la estrella de τ . Si consideramos el haz $\mathcal{G} = \bigoplus_{\tau \in \Sigma(1)} K(\tau)$, las sucesiones exactas cortas anteriores se traducen en la sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow V^* \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión induce una sucesión exacta larga,

$$0 \longrightarrow \wedge^j \mathcal{F} \longrightarrow \wedge^j V^* \longrightarrow \wedge^{j-1} V^* \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G} \longrightarrow \dots \longrightarrow S^j \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

La aplicación $\wedge^j \mathcal{F} \longrightarrow \wedge^j V^*$ viene dada por las inclusiones $\wedge^j \sigma^\perp \longrightarrow \wedge^j V^*$ y es inyectiva. Por otra parte, las aplicaciones $\wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G} \longrightarrow \wedge^{j-n-1} V^* \otimes S^{n+1} \mathcal{G}$ están definidas como sigue. Si σ es un cono de dimensión $d-i$, sean v_1, \dots, v_{d-i} los vectores que lo generan. Si construimos una base v_1, \dots, v_n y tomamos su base dual, x_1, \dots, x_n , tenemos que $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{j-n}}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_{j-n} \leq d$ es una base de $\wedge^{j-n} V^*$. Ahora, si identificamos \mathcal{G}_σ con los polinomios homogéneos de grado 1 en las variables X_1, \dots, X_{d-i} con coeficientes reales, $S^n \mathcal{G}$ es el conjunto de polinomios homogéneos de grado n , y definimos $\wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G}_\sigma \longrightarrow \wedge^{j-n-1} V^* \otimes S^{n+1} \mathcal{G}_\sigma$ por

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{j-n}} \otimes X_{k_1} \cdots X_{k_n} \longmapsto \sum_{k=1}^{j-n} (-1)^k x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge x_{i_{j-n}} \otimes X_k X_{k_1} \cdots X_{k_n},$$

con $1 \leq i_1 < \dots < i_{j-n} \leq d$ y $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d-i\}$.

Efectivamente, que la sucesión larga anterior es un complejo de cadenas es una simple comprobación, mientras que la exactitud se puede demostrar inductivamente en n . Omitimos la prueba por falta de espacio.

Afirmamos que $H^i(\wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Así, el complejo de Koszul nos da sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \wedge^j \mathcal{F} \longrightarrow \wedge^j V^* \longrightarrow \mathcal{E}_{j-1} \longrightarrow 0, \\ &\quad \vdots \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{E}_{j-n} \longrightarrow \wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_{j-n-1} \longrightarrow 0, \\ &\quad \vdots \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow V^* \otimes S^{j-1} \mathcal{G} \longrightarrow S^j \mathcal{G} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

que inducen respectivas sucesiones exactas largas en las cohomologías. Para la última,

$$\cdots \longrightarrow H^0(S^j \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

y $H^i(\mathcal{E}_1) = 0$ para $i > 1$. Si suponemos que $H^i(\mathcal{E}_{j-n-1}) = 0$ para $i > j - n - 1$, tenemos, usando la sucesión exacta correspondiente,

$$\cdots \longrightarrow H^{j-n-1}(\mathcal{E}_{j-n-1}) \longrightarrow H^{j-n}(\mathcal{E}_{j-n}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{j-n+1}(\mathcal{E}_{j-n}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

luego $H^i(\mathcal{E}_{j-n}) = 0$ para $i > j - n$. Así, $H^i(\mathcal{E}_{j-1}) = 0$ para $i > j - 1$, y usando la primera sucesión exacta,

$$\cdots \longrightarrow H^{j-1}(\mathcal{E}_{j-1}) \longrightarrow H^j(\wedge^j \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{j+1}(\wedge^j \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

y $H^{i,j}(\Sigma) = H^i(\wedge^j \mathcal{F}) = 0$ para $i > j$, como queríamos probar.

Para probar la afirmación, para $n = 0$ tenemos que $H^d(\wedge^j V^*) = 0$ y

$$H^i(\wedge^j V^*) = \tilde{H}_{d-i-1}(\Sigma \cap S^{d-1}; \wedge^j V^*) = 0$$

para $1 \leq i \leq d - 1$ por ser $\Sigma \cap S^{d-1}$ la triangulación de una esfera y la homología simplicial reducida de una esfera 0 salvo en grado máximo.

Para $n \neq 0$, observemos en primer lugar que $H^i(\wedge^{j-n} V^* \otimes S^n \mathcal{G}) \simeq \wedge^{j-n} V^* \otimes H^i(S^n \mathcal{G})$. Tenemos que, para $\sigma \in \Sigma(d - i)$,

$$S^n \mathcal{G} \simeq \langle X_{k_1} \cdots X_{k_n} : k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d - i\} \rangle \simeq \bigoplus_{k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d - i\}} \mathbb{R} = \bigoplus_{\tau_1, \dots, \tau_n \in \Sigma(1)} \mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)_\sigma,$$

(con τ_i no necesariamente distinto de τ_j) donde el haz $\mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ está definido por

$$\mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)_\sigma = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \sigma \text{ contiene a } \tau_1, \dots, \tau_n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, si τ_1, \dots, τ_n son los rayos que generan la cara γ , $\mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ es el haz constante \mathbb{R} en la estrella de γ , y se puede probar, como en el Lema 3.1.6, que

$$H^d(\mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)) = 0$$

y

$$H^i(\mathcal{G}(\tau_1, \dots, \tau_n)) = H_{d-i-1}(\overline{\text{st}}(\gamma) \cap S^{d-1}, \partial \overline{\text{st}}(\gamma) \cap S^{d-1}; \mathbb{R}),$$

donde los últimos son los grupos de homología simplicial relativa de $(\overline{\text{st}}(\gamma) \cap S^{d-1}, \partial \overline{\text{st}}(\gamma) \cap S^{d-1})$ con coeficientes en \mathbb{R} . Pero estos grupos se anulan porque $|\overline{\text{st}}(\gamma)| \cap S^{d-1}$ es contráctil (por ser homeomorfo a un disco). \square

Resumiendo, si tenemos un abanico simplicial completo Σ , $H^{i,j}(\Sigma) = 0$ para $i \neq j$ y $H^{d,d}(\Sigma) = \mathbb{R}$.

Si consideramos ahora un politopo simple P y su abanico normal Σ , tenemos que Σ es un abanico simplicial completo. Recordamos que el h -vector de un politopo simple viene dado por

$$h_j(P) = \sum_{i=j}^d \binom{i}{j} (-1)^{i-j} f_i(P),$$

donde $f_i(P)$ es el número de caras i dimensionales de P ($f_d(P) = 1$).

Corolario 3.1.9. *Para un politopo simple P y su abanico normal Σ , se verifica*

$$h_j(P) = \dim(H^{j,j}(\Sigma)).$$

DEMOSTRACIÓN. La característica de Euler de un complejo C^\bullet es $\sum_i (-1)^i \dim C^i$. Así, la característica de Euler del complejo $C^\bullet(\wedge^j \mathcal{F})$ es, por una parte,

$$\sum_i (-1)^i \sum_{\sigma \in \Sigma(d-i)} \dim(\wedge^j \sigma^\perp) = \sum_{i=j}^d \binom{i}{j} (-1)^i f_i(P).$$

Por otra, se puede comprobar que esta cantidad es igual a

$$\sum_i (-1)^i \dim(H^i(\wedge^j \mathcal{F})) = (-1)^j \dim(H^{j,j}(\Sigma)).$$

Así,

$$\dim(H^{j,j}(\Sigma)) = \sum_{i=j}^d \binom{i}{j} (-1)^{i-j} f_i(P) = h_j(P)$$

□

Recordamos que un j -peso en P es una función ω de las caras de dimensión j de P en \mathbb{R} de forma que, para toda cara G de P de dimensión $j+1$, se tiene

$$\sum_{F \subset G} \omega(F) u_{F,G} = 0,$$

donde $u_{F,G}$ es el vector normal a F en el espacio director de G . El conjunto de todos los j -pesos de P , $\Omega_j(P)$, es un espacio vectorial real. Podría parecer que la elección de una base para definir el vector normal influye en la estructura de los $\Omega_j(P)$. Esto no es así; de hecho, $\Omega_j(P)$ depende únicamente de Σ :

Teorema 3.1.10. *Si P es un politopo simple, el espacio $\Omega_j(P)$ es isomorfo a $H^{j,j}(\Sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como el complejo $C^\bullet(\wedge^j \mathcal{F})$ es cero en grados $< j$, tenemos por definición que $H^{j,j}(\Sigma)$ es el núcleo de

$$\delta : \bigoplus_{\sigma \in \Sigma(d-j)} \wedge^j \sigma^\perp \longrightarrow \bigoplus_{\tau \in \Sigma(d-j-1)} \wedge^j \tau^\perp.$$

Los elementos de $\Sigma(d-j)$ están identificados con las j -caras de P mediante una biyección que invierte contenidos. Sea e_1, \dots, e_d la base canónica de \mathbb{R}^d . Dada una cara F de dimensión j , haciendo un cambio de coordenadas apropiado, podemos suponer que $\text{lin}(F)$ (el espacio director de $\text{aff}(F)$) es $\langle e_1, \dots, e_j \rangle$ y que $\sigma_F = \text{pos}(e_{j+1}, \dots, e_d)$. Así, el espacio σ_F^\perp está identificado con $\text{lin}(F)$, ya que los vectores de σ_F son ortogonales a los de $\text{lin}(F)$. Tenemos un isomorfismo de $\wedge^j \text{lin}(F)$ en \mathbb{R} por $e_1 \wedge \dots \wedge e_j = 1$. Así, el espacio $\bigoplus_{\sigma \in \Sigma(d-j)} \wedge^j \sigma^\perp$ se identifica con el espacio de las funciones ω reales en el conjunto de caras j -dimensionales de P .

Elegimos una orientación en Σ . Sean ahora G una cara $(j+1)$ -dimensional de P y F una faceta de G , que podemos suponer también con $\text{lin}(G) = \langle e_1, \dots, e_{j+1} \rangle$, $\sigma_G = [e_{j+2}, \dots, e_d]$ y $\text{lin}(F) = \langle e_1, \dots, e_j \rangle$, $\sigma_F = \varepsilon_{F,G} [e_{j+1}, \dots, e_d]$ (donde $\varepsilon_{F,G} = \pm 1$). Tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \wedge^j \text{lin}(G) &\longrightarrow \text{lin}(G) \\ e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_{j+1} &\longmapsto \varepsilon_{F,G} e_i \end{aligned}$$

que manda $e_1 \wedge \dots \wedge e_j$ en $\varepsilon_{F,G} e_{j+1} = \varepsilon_{F,G} u_{F,G}$. Por tanto, δ está identificada con la aplicación

$$\omega \longmapsto \left(\sum_{F \subset G} \omega(F) u_{F,G} \right),$$

y el núcleo de esta aplicación es, precisamente, $\Omega_j(P)$. □

3.2. Funciones polinomiales y exponenciales por conos

Sea S el álgebra de funciones polinomiales en V con valores en \mathbb{R} . Dado un abanico Σ y un cono $\sigma \in \Sigma$, denotamos por R_σ al espacio de funciones polinomiales con valores en \mathbb{R} definidas en el subespacio generado por σ ; así, R_σ es el cociente de S por su ideal generado por σ^\perp . Para τ una cara de σ , tenemos la restricción obvia $R_\sigma \rightarrow R_\tau$ dada por $f \mapsto f|_\tau$, y esto define un haz de S -álgebras $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$. Es más, S , R_σ y \mathcal{R} tienen una graduación natural dada por el grado de las funciones polinomiales. Escribimos

$$R_\Sigma := \{(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} : f_\sigma \in R_\sigma, f_\sigma|_\tau = \tau \forall \tau \subset \sigma\}.$$

Tenemos que R_Σ es un S -álgebra graduada: el álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos en Σ . Si Σ es d -dimensional puro, R_Σ es el espacio de secciones globales de \mathcal{R} como haz en el espacio topológico asociado a Σ .

Para un entero no negativo n , denotamos por $R_{\Sigma,n}$ a la componente homogénea de grado n de R_Σ . En particular, $R_{\Sigma,1}$ son las funciones continuas lineales por conos en Σ . Si Σ es simplicial y completo, $R_{\Sigma,1}$ contiene a V^* , el espacio de funciones lineales globales, y el cociente $R_{\Sigma,1}/V^*$ se identifica con $H^{1,1}(\Sigma)$. En efecto, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow V^* \longrightarrow \mathbb{R}_1 \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga en las cohomologías que comienza con

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(V^*) \longrightarrow H^0(\mathcal{R}_1) \longrightarrow H^1(\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(V^*) \longrightarrow \dots,$$

y, como $H^0(\mathcal{F}) = H^{0,1}(\mathcal{F}) = 0$, $H^0(V^*) = V^*$, $H^0(\mathcal{R}_1) = R_{\Sigma,1}$, $H^1(\mathcal{F}) = H^{1,1}(\Sigma)$ y $H^1(V^*) = 0$, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow V^* \longrightarrow R_{\Sigma,1} \longrightarrow H^{1,1}(\Sigma) \longrightarrow 0,$$

que implica $H^{1,1} = R_{\Sigma,1}/V^*$. En [Bri97, Sección 2.1] se obtiene la siguiente relación de las componentes de grado más alto de R_Σ con los espacios de Hodge de Σ . Omitimos la prueba, que se encuentra en el mismo artículo.

Teorema 3.2.1. *Sea Σ un abanico simplicial completo. El S -módulo graduado R_Σ es libre de rango finito, con generadores homogéneos de grados $0, 1, \dots, d$. Además, el \mathbb{R} -espacio vectorial generado por los generadores de grado i es isomorfo a $H^{i,i}(\Sigma)$ para cada i ; en particular, solo hay un generador de grado d .*

Dado σ un cono simplicial de dimensión d , denotamos por Φ_σ al producto de las ecuaciones de las facetas de σ . Así, $\Phi_\sigma \in S$ está únicamente determinado salvo un factor de escala. Normalizamos Φ_σ como sigue: elegimos un elemento no nulo de $\wedge^d V^*$ como unidad de volumen e imponemos que la ecuación de las facetas de σ sean no negativas en σ y que el valor absoluto de su producto exterior (como elementos de V^*) sea 1. Denotamos por φ_σ a la función en V tal que

$$\varphi_\sigma(v) = \begin{cases} \Phi_\sigma(v) & \text{si } v \in \sigma, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, φ_σ es una función continua polinomial a trozos que se anula fuera de σ° .

Teorema 3.2.2. *Sea Σ un abanico simplicial completo. Existe una aplicación lineal no nula $\pi_\Sigma : R_\Sigma \rightarrow S$ tal que:*

- i) π_Σ es S -lineal,
- ii) π_Σ es homogénea de grado $-d$.

Además, (i) y (ii) definen π_Σ de forma única módulo producto por escalares, y una elección de π_Σ está dada por

$$\pi_\Sigma(f) = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{f_\sigma}{\Phi_\sigma}$$

para cualquier $f = (f_\sigma) \in R_\Sigma$. Así, $\pi_\Sigma(\phi_\sigma) = 1$ para cualquier $\sigma \in \Sigma(d)$.

DEMOSTRACIÓN. Si π_Σ existe, se anula en cualquier elemento de R_Σ de grados $0, \dots, d-1$ por (ii). Así, como por (i), $\pi_\Sigma(fg) = g\pi_\Sigma(f)$ para todo $g \in S$, y existe un único generador f_d de grado d por el Corolario anterior, $\pi_\Sigma(f_d g) = g\pi_\Sigma(f_d) = \alpha g$ con $\alpha \in \mathbb{R}^*$, luego π_Σ está únicamente determinada por el factor α .

Ahora, de nuevo por el Corolario, tenemos que el cociente de R_Σ por el S -submódulo generado por elementos homogéneos de grado como mucho $d-1$ es isomorfo a S , y por tanto la aplicación cociente $R_\Sigma \rightarrow S$ verifica (i) y (ii), luego existe π_Σ .

Sea $f = (f_\sigma) \in R_\Sigma$, y sea

$$g = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{f_\sigma}{\Phi_\sigma}.$$

Tenemos que g es una función racional en V , y el denominador de g es el producto de ecuaciones de hiperplanos de V que contienen conos $(d-1)$ -dimensionales. Afirmamos que g es una función polinomial en V .

Sea $\tau \in \Sigma(d-1)$ un cono $(d-1)$ -dimensional, y sean $\sigma', \sigma'' \in \Sigma(d)$ los conos maximales tales que $\tau = \sigma' \cap \sigma''$ es una faceta común a ambos. Podemos encontrar generadores $e_1, \dots, e_{d-1}, e'_d$ (resp. e''_d) de σ' (resp. σ'') de tal forma que $e_1 \wedge \dots \wedge e_{d-1} \wedge e'_d = 1$ y $e_1 \wedge \dots \wedge e_{d-1} \wedge e''_d = -1$. Así, $e_1 \wedge \dots \wedge e_{d-1} \wedge (e'_d + e''_d) = 0$ y existen $a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=1}^{d-1} a_i e_i = e'_d + e''_d$.

Si $\{x_1, \dots, x_d\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_{d-1}, e'_d\}$, tenemos que la base dual de $\{e_1, \dots, e_{d-1}, e''_d\}$ es $\{x_1 + a_1 x_d, \dots, x_{d-1} + a_{d-1} x_d, -x_d\}$, luego

$$\Phi_{\sigma'} = \prod_{i=1}^d x_i, \quad \Phi_{\sigma''} = -x_d \prod_{i=1}^{d-1} (x_i + a_i x_d).$$

Se sigue que

$$\frac{f_{\sigma'}}{\Phi_{\sigma'}} + \frac{f_{\sigma''}}{\Phi_{\sigma''}} = x_d^{-1} \left(\prod_{i=1}^{d-1} x_i^{-1} (x_i + a_i x_d)^{-1} \right) \left(f_{\sigma'} \prod_{i=1}^{d-1} (x_i + a_i x_d) - f_{\sigma''} \prod_{i=1}^{d-1} x_i \right)$$

no tiene polos en el hiperplano $(x_d = 0)$, ya que $f_{\sigma'}|_\tau = f_{\sigma''}|_\tau$ y $f_{\sigma'} - f_{\sigma''}$ es divisible por x_d .

Así, el numerador de g es múltiplo de las ecuaciones de todos los hiperplanos que contienen conos $(d-1)$ -dimensionales de Σ y, por tanto, es una función polinomial en V .

Por tanto, $p_\Sigma : f \mapsto g$ manda R_Σ en S y claramente satisface (i) y (ii). Además,

$$p_\Sigma(\varphi_\sigma) = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_\sigma} = 1$$

para todo $\sigma \in \Sigma(d)$, con lo que p_Σ es no nula y es una elección de π_Σ . \square

Dado un abanico simplicial completo Σ , decimos que Σ' es una subdivisión simplicial de Σ si es un abanico simplicial completo tal que, para todo cono maximal $\sigma' \in \Sigma'(d)$, existe un cono maximal $\sigma \in \Sigma(d)$ con $\sigma' \subset \sigma$. Si Σ' es una subdivisión simplicial de Σ , toda función $f \in R_\Sigma$ es, de forma natural, una función $f \in R_{\Sigma'}$. Veamos que a partir de una función en $R_{\Sigma'}$ también se puede definir una función en R_Σ que sea compatible con las aplicaciones $\pi_\Sigma, \pi_{\Sigma'}$.

Teorema 3.2.3. *Sea Σ un abanico simplicial completo, y sea Σ' una subdivisión simplicial de Σ . Existe una única aplicación $\pi_{\Sigma', \Sigma} : R_{\Sigma'} \rightarrow R_\Sigma$ de forma que*

- i) $\pi_{\Sigma', \Sigma}(1) = 1$,
- ii) $\pi_{\Sigma', \Sigma}$ es R_Σ -lineal,
- iii) $\pi_{\Sigma', \Sigma}$ es homogénea de grado 0.

Además, tenemos para cualquier $\sigma \in \Sigma$ y cualquier $f = (f_{\sigma'}) \in R_{\Sigma'}$

$$\pi_{\Sigma', \Sigma}(f)_\sigma = \Phi_\sigma \sum_{\sigma' \subset \sigma, \sigma' \in \Sigma'(d)} \frac{f_{\sigma'}}{\Phi_{\sigma'}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\pi : R_{\Sigma'} \rightarrow R_\Sigma$ cumpliendo (i), (ii) y (iii). Entonces, la aplicación $\pi_\Sigma \circ \pi : R_{\Sigma'} \rightarrow S$ es S -lineal y homogénea de grado $-d$. Además, restringida a R_Σ es π_Σ . Por tanto, $\pi_\Sigma \circ \pi = \pi_{\Sigma'}$. Ahora, sea $\sigma \in \Sigma(d)$, de donde $\varphi_\sigma \in R_\Sigma$. Tenemos que, para todo $f \in R_{\Sigma'}$,

$$\pi_{\Sigma'}(f\varphi_\sigma) = \pi_\Sigma(\pi(f\varphi_\sigma)) = \pi_\Sigma(\varphi_\sigma(\pi(f))) = \frac{\Phi_\sigma \pi(f)_\sigma}{\Phi_\sigma} = \pi(f)_\sigma.$$

Por tanto, tenemos que

$$\pi(f)_\sigma = \pi_{\Sigma'}(f\varphi_\sigma) = \sum_{\sigma' \in \Sigma'(d)} \frac{(f\varphi_\sigma)_{\sigma'}}{\Phi_{\sigma'}} = \sum_{\sigma' \subset \sigma, \sigma' \in \Sigma'(d)} \frac{\Phi_\sigma f_{\sigma'}}{\Phi_{\sigma'}} = \Phi_\sigma \sum_{\sigma' \subset \sigma, \sigma' \in \Sigma'(d)} \frac{f_{\sigma'}}{\Phi_{\sigma'}},$$

con lo que, de existir π , tiene que ser $\pi = \pi_{\Sigma', \Sigma}$. Ahora, que $\pi_{\Sigma', \Sigma}$ efectivamente tiene valores en R_Σ y que verifica las propiedades es una comprobación como en el Teorema anterior. \square

Corolario 3.2.4. *Con las notaciones anteriores:*

- i) Para cualquier $f \in R_\Sigma \subset R_{\Sigma'}$, tenemos que $\pi_{\Sigma'}(f) = \pi_\Sigma(f)$.
- ii) Para cualquier subdivisión simplicial Σ'' de Σ' , tenemos que $\pi_{\Sigma', \Sigma} \circ \pi_{\Sigma'', \Sigma'} = \pi_{\Sigma'', \Sigma}$.

DEMOSTRACIÓN. (i) es consecuencia de que $\pi_{\Sigma', \Sigma}(1) = 1$ y de la R_Σ -linealidad. (ii) es por la unicidad de $\pi_{\Sigma'', \Sigma}$. \square

Si denotamos por R al álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos (con respecto a un abanico completo cualquiera), toda función $f \in R$ está en R_Σ para algún abanico simplicial Σ (ya que todo abanico completo admite una subdivisión simplicial) y, por los Teoremas anteriores, tenemos la existencia de una aplicación canónica $\pi : R \rightarrow S$ que es S -lineal y homogénea de grado $-d$. Además, para cualquier abanico simplicial completo Σ , existe una proyección canónica R_Σ -lineal $R \rightarrow R_\Sigma$ que es compatible con π .

Teorema 3.2.5. *Sea Σ un abanico simplicial completo. Entonces, la aplicación S -bilineal simétrica*

$$\begin{aligned} R_\Sigma \times R_\Sigma &\longrightarrow S \\ (f, g) &\longmapsto \pi_\Sigma(fg) \end{aligned}$$

es un emparejamiento perfecto, esto es, induce un isomorfismo $R_\Sigma \rightarrow \text{Hom}_S(R_\Sigma, S)$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que la aplicación $R_\Sigma \rightarrow \text{Hom}_S(R_\Sigma, S)$ es inyectiva. Sea $f \in R_\Sigma$ tal que $\pi_\Sigma(fg) = 0$ para todo $g \in R_\Sigma$. Para cualquier $\sigma \in \Sigma(d)$, sea $h_\sigma \in S$. Entonces las funciones $\varphi_\sigma h_\sigma$ se suman para dar una función continua polinomial por conos g en Σ , ya que todas ellas se anulan en cada cono $(d-1)$ -dimensional. Por tanto, tenemos que

$$0 = \pi_\Sigma(fg) = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{f_\sigma g_\sigma}{\Phi_\sigma} = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{f_\sigma (\varphi_\sigma h_\sigma)_\sigma}{\Phi_\sigma} = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \frac{f_\sigma \Phi_\sigma h_\sigma}{\Phi_\sigma} = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} f_\sigma h_\sigma.$$

Así, dado $\sigma \in \Sigma(d)$, si tomamos $h_\sigma = 1$ y $h_{\sigma'} = 0$ para $\sigma' \in \Sigma \setminus \sigma$, tenemos que $f_\sigma = 0$. Por tanto, es $f = 0$.

Veamos ahora que $R_\Sigma \longrightarrow \text{Hom}_S(R_\Sigma, S)$ es sobreyectiva. Sea $u : R_\Sigma \longrightarrow S$ una aplicación S -lineal. Definimos, para cada $\sigma \in \Sigma(d)$, $g_\sigma = u(\varphi_\sigma)$. Veamos que $g = (g_\sigma)$ es un elemento de R_Σ . Sea $\tau \in \Sigma(d-1)$ el cono que separa a dos conos maximales $\sigma', \sigma'' \in \Sigma(d)$. Entonces, $\varphi_{\sigma'} - \varphi_{\sigma''} = f_\tau h_{\sigma', \sigma''}$, donde f_τ es una ecuación de τ y $h_{\sigma', \sigma''} \in R_\Sigma$. Así, $g_{\sigma'} - g_{\sigma''} = f_\tau u(h_{\sigma', \sigma''})$, que se anula en τ , y $g_{\sigma'}|_\tau = g_{\sigma''}|_\tau$, con lo que $g \in R_\Sigma$.

Sea Φ_Σ el producto de las ecuaciones de todos los conos $(d-1)$ -dimensionales de Σ . Entonces, para cualquier $f \in R_\Sigma$, tenemos que

$$f\Phi_\Sigma = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \varphi_\sigma \frac{f_\sigma \Phi_\Sigma}{\Phi_\sigma}$$

En efecto, las dos expresiones coinciden en todo $\sigma \in \Sigma(d)$, ya que $\varphi_\sigma|_\sigma = \Phi_\sigma$ y $\varphi_\tau|_\sigma = 0$ para todo $\tau \neq \sigma$. Así, si $v \in \sigma$, tenemos que

$$\sum_{\tau \in \Sigma(d)} \varphi_\tau(v) f_\tau(v) \frac{\Phi_\Sigma(v)}{\Phi_\tau(v)} = \Phi_\sigma(v) f_\sigma(v) \frac{\Phi_\Sigma(v)}{\Phi_\sigma(v)} = (f_\sigma \Phi_\Sigma)(v).$$

Además, como $f_\sigma \frac{\Phi_\Sigma}{\Phi_\sigma} \in S$ para todo $\sigma \in \Sigma(d)$, tenemos que

$$u(f\Phi_\Sigma) = u\left(\sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \varphi_\sigma f_\sigma \frac{\Phi_\Sigma}{\Phi_\sigma}\right) = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} u(\varphi_\sigma) f_\sigma \frac{\Phi_\Sigma}{\Phi_\sigma} = \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} g_\sigma f_\sigma \frac{\Phi_\Sigma}{\Phi_\sigma},$$

luego $\Phi_\Sigma u(f) = \Phi_\Sigma \pi_\Sigma(fg)$ y $u(f) = \pi_\Sigma(fg)$, con lo que $\pi_\Sigma(\cdot g) = u(\cdot)$ y $R_\Sigma \longrightarrow \text{Hom}_S(R_\Sigma, S)$. \square

Sea \bar{R}_Σ el cociente del álgebra R_Σ por su ideal generado por las funciones lineales globales (esto es, por V^*). Para $f \in R_\Sigma$, sea \bar{f} su imagen en el cociente. Por un Corolario anterior, tenemos que, si f está generado por generadores de grado i , g_1, \dots, g_r , tenemos que

$$f = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r$$

con $f_i \in S$ y, en el cociente

$$\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{g}_1 + \dots + \bar{f}_r \bar{g}_r = f_1(0) \bar{g}_1 + \dots + f_r(0) \bar{g}_r \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r \rangle_{\mathbb{R}} \simeq H^{i,i}(\Sigma).$$

Así, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales graduados

$$\bar{R}_\Sigma \simeq \bigoplus_{j=0}^d H^{j,j}(\Sigma).$$

Vamos a pasar ahora a estudiar las funciones continuas polinomiales por conos en un abanico simplicial Σ . Comenzamos introduciendo de manera formal las que serán las funciones exponenciales globales en V . Denotamos por $\mathbb{Z}[V^*]$ al anillo de grupo de V^* sobre \mathbb{Z} : es un \mathbb{Z} -módulo libre cuya base son los símbolos e^x con $x \in V^*$. Definimos la multiplicación como $e^x e^y = e^{x+y}$, extendido por linealidad a

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i e^{x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i e^{y_i}\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j e^{x_i + y_j}.$$

Así, $\mathbb{Z}[V^*]$ es un anillo conmutativo con unidad, donde la unidad es $1 = e^0$. El subgrupo generado por $\{e^x - 1 : x \in V^*\}$ es un ideal, lo denotamos por I . Basta ver que $(e^x - 1)e^y = e^{x+y} - e^y = (e^{x+y} - 1) - (e^y - 1) \in I$ para todo $x, y \in V^*$.

Sea Σ un abanico. Para un cono $\sigma \in \Sigma$, sea $E_\sigma = \mathbb{Z}[L(\sigma)^*]$ el anillo de grupo de $L(\sigma)^*$ sobre \mathbb{Z} (donde $L(\sigma)^*$ es el dual del subespacio lineal generado por σ). Para $\sigma \in \Sigma$ y una cara τ de σ , tenemos la inclusión $L(\tau) \subset L(\sigma)$ que induce una aplicación sobreyectiva $L(\sigma)^* \longrightarrow L(\tau)^*$ y, por tanto, un homomorfismo sobreyectivo $E_\sigma \longrightarrow E_\tau$, $f \longmapsto f|_\tau$, dado por $e^x \longmapsto e^{x|_\tau}$. Escribimos

$$E_\sigma = \{(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} : f_\sigma \in E_\sigma, f_\sigma|_\tau = f_\tau \forall \tau \subset \sigma\}.$$

E_Σ es el anillo de funciones exponenciales por conos en Σ ; tiene una estructura evidente de $\mathbb{Z}[V^*]$ -módulo. Sin embargo, no es finitamente generado, lo que hace difícil estudiar sus propiedades usando métodos homológicos. Por tanto, procederemos por inducción en el número de conos maximales de Σ .

Una función exponencial por conos tiene asociada una evidente aplicación de evaluación en V : si tenemos una función $f = (f)_\sigma \in E_\Sigma$ y v en algún cono de Σ , digamos σ , es $f(v) = f_\sigma(v)$, donde, si $x \in L(\sigma)^*$, definimos $e^x(v)$ por $e^{x(v)}$.

Dado un cono maximal $\sigma \in \Sigma$, denotamos por E_{σ° al conjunto de todas las funciones $f \in E_\Sigma$ tales que f se anula idénticamente fuera de σ° . Así, E_{σ° es un ideal de E_Σ . En el caso de que Σ sea simplicial, construimos elementos de E_{σ° de la siguiente forma: dado un rayo τ de σ , existe una función continua

lineal por conos no nula φ_τ que se anula en todos los rayos de Σ excepto en τ . Además, φ_τ está definida de forma única salvo por un factor de escala; llamamos a φ_τ una función de Courant de τ . Por lo tanto, $e^{\varphi_\tau} - 1$ es una función en E_Σ que se anula en el exterior de la estrella de τ , y $\prod_{\tau \in \sigma(1)} (e^{\varphi_\tau} - 1)$ es un elemento de E_{σ° para todo cono maximal $\sigma \in \Sigma$.

Proposición 3.2.6. *Sea Σ un abanico simplicial; sea σ un cono maximal de Σ .*

i) *La sucesión*

$$0 \longrightarrow E_{\sigma^\circ} \longrightarrow E_\Sigma \longrightarrow E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \longrightarrow 0$$

es exacta.

ii) *El $\mathbb{Z}[V^*]$ -módulo E_{σ° está generado por todos los $\prod_{\tau \in \sigma(1)} (e^{\varphi_\tau} - 1)$, donde φ_τ es una función de Courant de τ .*

DEMOSTRACIÓN. (i) Claramente, la sucesión

$$0 \longrightarrow E_{\sigma^\circ} \longrightarrow E_\Sigma \longrightarrow E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \longrightarrow 0$$

es exacta. Para probar la sobreyectividad de la restricción $E_\Sigma \longrightarrow E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}}$ basta con ver que toda función continua exponencial por conos en el borde de σ se extiende a una función exponencial en σ . Elegimos coordenadas x_1, \dots, x_d en V de forma que

$$\sigma = \left(\bigcap_{j=1}^r (x_j \geq 0) \right) \cap \left(\bigcap_{j=r+1}^d (x_j = 0) \right).$$

Para cualquier subconjunto $J \subset \{1, \dots, r\}$, definimos

$$\sigma_J := \sigma \cap \left(\bigcap_{j \notin J} (x_j = 0) \right).$$

Así, tenemos una biyección entre subconjuntos J de $\{1, \dots, r\}$ y caras σ_J de σ . Por hipótesis, para cualquier subconjunto propio $J \subset \{1, \dots, r\}$ existe una función exponencial $f_J(x_j)_{j \in J}$ en σ_J , y estas funciones son compatibles en el borde de σ . Así, sea

$$f(x_1, \dots, x_r) := \sum_{J \subsetneq \{1, \dots, r\}} (-1)^{r-1-\#(J)} f_J(x_j)_{j \in J}.$$

Tenemos que f es una función exponencial en σ y, si x_J es la r -tupla cuya j -ésima coordenada es x_j si $j \in J$ y 0 si $j \notin J$, $f(x_J) = f_J(x_j)_{j \in J}$ para todo subconjunto $J \subsetneq \{1, \dots, r\}$. Por tanto, f es la función buscada.

(ii) Definimos una aplicación

$$\begin{aligned} p_\sigma : E_\sigma &\longrightarrow E_{\sigma^\circ} \\ f(x_1, \dots, x_r) &\longmapsto \sum_{J \subsetneq \{1, \dots, r\}} (-1)^{r-\#(J)} f(x_J). \end{aligned}$$

p_σ es una proyección de E_σ en E_{σ° , ya que, por el apartado anterior, la suma en los subconjuntos propios de $\{1, \dots, r\}$ coincide con $-f$ en el borde de σ , y por tanto $p_\sigma(f)$ se anula en el borde de σ . Además, tenemos que cualquier función de E_σ está generada por $e^{a_1 x_1 + \dots + a_r x_r}$ con $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, y por tanto la imagen de p_σ (que es E_{σ°) está generada por

$$p_\sigma(e^{a_1 x_1 + \dots + a_r x_r}) = \prod_{j=1}^r (e^{a_j x_j} - 1),$$

donde cada $a_j x_j$ es una función de Courant del rayo $(\prod_{k \neq j} x_k = 0)$. □

Corolario 3.2.7. *Para cualquier abanico simplicial Σ , el grupo abeliano E_Σ está generado por exponenciales de funciones continuas lineales por conos en Σ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \Sigma$ un cono maximal, y sea $f \in E_\Sigma$. Por inducción en el número de conos, podemos suponer que

$$f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} = \sum_{j=1}^r a_j e^{f_j}$$

con $a_j \in \mathbb{Z}$, f_j continua lineal por conos en $\Sigma \setminus \{\sigma\}$. Cada f_j se extiende a una función lineal por conos en Σ (basta con extender por linealidad las funciones de los rayos de σ a todo el cono), sea \bar{f}_j tal función. Así, tenemos que

$$\left(f - \sum_{j=1}^r a_j e^{\bar{f}_j} \right) \Big|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} = 0$$

y la diferencia es un elemento de E_{σ° , que hemos visto que está generado por exponenciales de funciones lineales por conos, luego f también lo está. \square

Dado Σ un abanico, denotamos por J_Σ al núcleo de la evaluación en el 0 en E_Σ . Claramente, si $f \in IE_\Sigma$, $f(0) = 0$, con lo que $IE_\Sigma \subset J_\Sigma$, y por tanto $I^n E_\Sigma \subset J_\Sigma^n$ para $n \geq 1$.

Teorema 3.2.8. *Para todo abanico simplicial d -dimensional Σ , y para todo $n \geq 1$, tenemos $J_\Sigma^{n+d} \subset I^n E_\Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo demostramos por inducción en el número de conos maximales en Σ . Si solo hubiera uno, sería $E_\Sigma \equiv \mathbb{Z}[V^*]$ y $J_\Sigma = I$, con lo que el resultado es trivial.

Supongamos que hay más de un cono maximal. Sea $\sigma \in \Sigma$ uno de ellos, y sea $f \in J_\Sigma^{n+d}$. Tenemos que $f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \in J_{\Sigma \setminus \{\sigma\}}^{n+d}$ y, por hipótesis de inducción, $f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \in I^n E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}}$. Así, $f_1 = f - f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \in E_{\sigma^\circ}$ está en $E_{\sigma^\circ} \cap J_\Sigma^{n+d}$, y basta ver que $f_1 \in I^n E_{\sigma^\circ}$, ya que, en ese caso,

$$f = f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} + f_1 \in I^n E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} + I^n E_{\sigma^\circ} \subseteq I^n (E_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} + E_{\sigma^\circ}) = I^n E_\Sigma.$$

Podemos suponer entonces que $f|_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} = 0$ y $f \in E_{\sigma^\circ} \cap J_\Sigma^{n+d}$. Si $\dim \sigma = r$, es $f \in E_{\sigma^\circ} \cap J_\Sigma^{n+r}$, esto es, $f_\sigma \in E_{\sigma^\circ} \cap I^{n+r} E_\sigma$. Por tanto, basta probar que $f_\sigma \in I^n E_{\sigma^\circ}$. Para ello, usando la notación de Proposición 3.2.6(ii), como $f_\sigma = p_\sigma(f_\sigma) \in p_\sigma(I^{n+r} E_\sigma)$, basta probar que

$$p_\sigma(I^{n+r} E_\sigma) \subset I^n p_\sigma(E_\sigma) = I^n E_{\sigma^\circ}.$$

Tenemos que $p_\sigma = p_1 \cdots p_r$, donde $p_i(f) = f - f|_{x_i=0}$. Además, los p_i conmutan entre sí. Para $f, g \in E_\sigma$, tenemos

$$p_i(fg) = p_i(f)f + f|_{x_i=0} p_i(g). \quad (\star)$$

Se sigue que $p_i(I^2 E_\sigma) \subset I p_i(E_\sigma)$: si $f \in I$, $f|_{x_i=0} \in I$. Inductivamente, se tiene

$$p_i(I^{n+1}) \subset I^n p_i(E_\sigma). \quad (\star\star)$$

Para acabar la prueba, basta probar por inducción que $p_i \cdots p_1(I^{n+i}) \subset I^n p_i \cdots p_1(E_\sigma)$. Con lo que acabamos de ver, se cumple para $i = 1$. Así,

$$\begin{aligned} p_i \cdots p_1(I^{n+i} E_\sigma) &= p_i(p_{i-1} \cdots p_1(I^{n+i} E_\sigma)) \subseteq p_i(I^{n+1} p_{i-1} \cdots p_1(E_\sigma)) \\ &\subseteq p_i(I^{n+1}) p_{i-1} \cdots p_1(E_\sigma) + I^{n+1} p_i \cdots p_1(E_\sigma) \\ &\subseteq I^n p_i(E_\sigma) p_{i-1} \cdots p_1(E_\sigma) + I^n p_i \cdots p_1(E_\sigma) \\ &\subseteq I^n p_i \cdots p_1(E_\sigma). \end{aligned}$$

\square

Denotamos por $R_{\Sigma, \geq n}$ (resp. $S_{\geq n}$) a la suma de las componentes homogéneas de grado al menos n de R_Σ (resp. S). Si \mathfrak{m} es el ideal de S generado por V^* , tenemos que $S_{\geq n} = \mathfrak{m}^n$. Para un cono maximal $\sigma \in \Sigma$, sea R_{σ° el ideal de R_Σ de las funciones que se anulan idénticamente fuera de σ° .

Proposición 3.2.9. *Sea Σ un abanico simplicial y sea $\sigma \in \Sigma$ un cono maximal.*

i) *La sucesión*

$$0 \longrightarrow R_{\sigma^\circ} \longrightarrow R_\Sigma \longrightarrow R_{\Sigma \setminus \{\sigma\}} \longrightarrow 0$$

es exacta.

ii) *El S -módulo R_{σ° está generado por “la” función $\varphi_\sigma = \prod_{\tau \in \sigma(1)} \varphi_\tau$, donde φ_τ es una función de Courant de τ positiva en σ .*

iii) *Si Σ es d -dimensional, para $n \geq 0$ se tiene $R_{\Sigma, \geq n+d} \subset \mathfrak{m}^n R_\Sigma \subset R_{\Sigma, \geq n}$.*

iv) *Para $n \geq 0$, se tiene $R_{\sigma^\circ} \cap \mathfrak{m}^n R_\Sigma = \mathfrak{m}^n R_{\sigma^\circ}$.*

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones de (i), (ii) y (iii) son análogas a las del caso de las funciones exponenciales. Para (iv), es claro que $\mathfrak{m}^n R_{\sigma^\circ}$ está contenido en $R_{\sigma^\circ} \cap \mathfrak{m}^n R_\Sigma$. Recordemos que hay una aplicación $\pi : R \longrightarrow S$ S -lineal tal que $\pi(\varphi_\sigma) = 1$. Así, $R = R_{\sigma^\circ} \oplus \ker \pi$: dada $f \in R$, tenemos

$$f = \varphi_\sigma \pi(f) + (f - \varphi_\sigma \pi(f))$$

con $\varphi_\sigma \pi(f) \in R_{\sigma^\circ}$ y $\pi(f - \varphi_\sigma \pi(f)) = \pi(f) - \pi(\varphi_\sigma) \pi(f) = 0$ y, si $f = \varphi_\sigma g + h$ con $g \in S$, $h \in \ker \pi$,

$$\pi(f) = \pi(\varphi_\sigma)g + \pi(h) = g$$

y la suma es directa. Por tanto, $R_{\sigma^\circ} \cap \mathfrak{m}^n R_\Sigma \subset R_{\sigma^\circ} \cap \mathfrak{m}^n R \subset \mathfrak{m}^n R_{\sigma^\circ}$. \square

Corolario 3.2.10. *La K -álgebra R_Σ está generada por las funciones lineales por conos en Σ .*

DEMOSTRACIÓN. Igual que en el caso exponencial. \square

Sea Σ un abanico simplicial. El álgebra R_Σ está dotada de dos filtraciones: por potencias de los ideales $R_{\Sigma, \geq 1}$ y $\mathfrak{m}R_\Sigma$. Del último Corolario se sigue que $(R_{\Sigma, \geq 1})^n = R_{\Sigma, \geq n}$. Así, tenemos que, para todo $n \geq 0$,

$$(R_{\Sigma, \geq 1})^{n+d} \subset \mathfrak{m}^n R_\Sigma \subset (R_{\Sigma, \geq 1})^n.$$

Por tanto, las dos filtraciones definen la misma topología en R_Σ . Denotamos por \hat{R}_Σ a la completación de R_Σ con respecto a esta topología. Entonces, \hat{R}_Σ es un álgebra sobre el anillo \hat{S} de series de potencias formales en V . Una referencia básica para consultar la definición y las propiedades de las filtraciones y sus topologías asociadas es ([AM69, Capítulo 10]).

Sea R_Σ^{int} el subconjunto de R_Σ de funciones f con $f(0)$ un entero. Tenemos que R_Σ^{int} es un subanillo de graduado de R_Σ , con $R_{\Sigma,0}^{int} = \mathbb{Z}$ y $R_{\Sigma,n}^{int} = R_{\Sigma,n}$ para $n \geq 1$.

Proposición 3.2.11. *Con las notaciones anteriores:*

- i) *El álgebra \hat{R}_Σ consiste en todas las series de potencias formales por conos compatibles en Σ ; esto es,*

$$\hat{R}_\Sigma = \left\{ (f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} : f_\sigma \in \hat{R}_\sigma, f_\sigma|_\tau = f_\tau \ \forall \tau \subset \sigma \right\}.$$

- ii) *La aplicación $E_\Sigma \rightarrow \hat{R}_\Sigma$ que manda cualquier función exponencial por conos (f_σ) a la colección de series de Taylor de cada f_σ es inyectiva. Además, su clausura es \hat{R}_Σ^{int} .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se puede consultar en [Bri97, Proposición 4.2]. \square

Si denotamos por E al anillo de funciones continuas exponenciales por conos en V (con respecto a un abanico completo cualquiera), tenemos que E se inyecta en \hat{R} como un subanillo denso de \hat{R}^{int} , ya que toda función de E pertenece a E_Σ para algún abanico simplicial Σ , luego pertenece a $\hat{R}_\Sigma \subset \hat{R}$ y si $f \in \hat{R}^{int}$, tenemos que es $f \in \hat{R}_\Sigma^{int}$ para algún abanico simplicial Σ y podemos aproximar f por funciones en $E_\Sigma \subset E$. Identificamos E con su imagen en \hat{R} .

Teorema 3.2.12. *Con las notaciones anteriores, $IE = E \cap \mathfrak{m}\hat{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente es $IE \subset E \cap \mathfrak{m}\hat{R}$, ya que el desarrollo en serie de $(e^x - 1)e^y$ es múltiplo de x , y falta comprobar la otra inclusión. Para ello, basta ver que $E_\Sigma \cap \mathfrak{m}\hat{R}$ está contenido en IE para algún abanico simplicial completo Σ . Ahora, como esta afirmación tiene sentido para cualquier abanico simplicial (no necesariamente completo) si reemplazamos IE por su restricción a $|\Sigma|$, podemos usar inducción en el número de conos maximales de Σ y reducir la demostración a probar que $E_{\sigma^\circ} \cap \mathfrak{m}\hat{R}$ está contenido en IE para todo cono simplicial d -dimensional σ .

Consideramos primero el caso $d = 1$. Elegimos la coordenada x de forma que $\sigma = (x \geq 0)$. Tenemos que el $\mathbb{Z}[V^*]$ -módulo E_{σ° está generado por funciones f_a de la forma

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{ax} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. La identidad

$$(e^{ax} - 1) + (e^{bx} - 1) = (e^{(a+b)x} - 1) - (e^{ax} - 1)(e^{bx} - 1)$$

implica que $f_a + f_b = f_{a+b} - (e^{ax} - 1)f_b$, luego

$$f_a + f_b - f_{a+b} \in IE. \quad (\star)$$

Dada $f \in E_{\sigma^\circ}$, escribimos $f = \sum_{i=1}^r u_i f_{a_i}$, donde $u_i \in \mathbb{Z}[V^*]$ y $a_i \in \mathbb{R}$. Ahora, como

$$u_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} e^{x_{ij}} = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} + \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} (e^{x_{ij}} - 1),$$

existen $n_i \in \mathbb{Z}$ con $g_i = u_i - n_i \in I$ y $f = \sum_{i=1}^r n_i f_{a_i} + \sum_{i=1}^r g_i f_{a_i} = \sum_{i=1}^r n_i f_{a_i} + g$ con $g \in IE$. Usando (\star) repetidamente, podemos escribir $f = f_c + h$ con $c \in \mathbb{R}$, $h \in IE$.

Si $f \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$, como $g \in IE \subset \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$, también es $f_c \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$. Si suponemos que $c \neq 0$, el desarrollo de Taylor de f_c es $f_c = \varphi_\sigma + xs$ con $s \in \hat{R}$, y es $\varphi_\sigma \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$. Como φ_σ es homogénea de grado 1, tiene que ser $\varphi_\sigma \in S_1$. Sin embargo, $\pi(\varphi_\sigma) = 1$ y $\pi(S_1) = 0$. Por tanto, es $c = 0$, $f_c = 0$ y $f = h \in IE$.

Vamos ahora al caso $d = 2$. Eligiendo coordenadas x_1, x_2 en V de forma que $\sigma = (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$, el $\mathbb{Z}[V^*]$ -módulo E_{σ° está generado por funciones f_{a_1, a_2} dadas por

$$f_{a_1, a_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} (e^{a_1 x_1} - 1)(e^{a_2 x_2} - 1) & \text{si } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Para todo $a \in \mathbb{R}$, definimos una función g_a en V dada por

$$g_a(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0 \\ e^{-ax_1} & \text{si } x_1 \leq 0 \text{ y } x_1 + x_2 \leq 0 \\ e^{-ax_1} & \text{si } x_2 \leq 0 \text{ y } x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Tenemos que g_a es una función continua exponencial por conos. Además, se verifica que

$$f_{a_1, a_2}(x_1, x_2) = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2} g_{a_1 + a_2}(x_1, x_2) - e^{a_1 x_1} g_{a_1}(x_1, x_2) - e^{a_2 x_2} g_{a_2}(x_1, x_2) + 1,$$

de donde $f_{a_1, a_2} - f_{a_2, a_1} = (e^{a_1 x_1 + a_2 x_2} - e^{a_2 x_1 + a_1 x_2}) g_{a_1 + a_2} \in IE$. Reemplazando (x_1, x_2) por $(b_1 x_1, b_2 x_2)$ para $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, deducimos que $f_{a_1 b_1, a_2 b_2} - f_{a_2 b_1, a_1 b_2} \in IE$. En particular, para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f_{a, b} - f_{1, ab} \in IE. \quad (\star\star)$$

Se sigue que toda $f \in E_{\sigma^\circ}$ se puede escribir como $f = \sum_{i=1}^r u_i f_{1, a_i} + g$, donde $u_i \in \mathbb{Z}[V^*]$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $g \in IE$. Podemos suponer, como antes, que los u_i están en \mathbb{Z} . Ahora, como en la primera parte de la prueba,

$$(e^{x_1} - 1)(e^{ax_2} - 1) + (e^{x_1} - 1)(e^{bx_2} - 1) = (e^{x_1} - 1)(e^{(a+b)x_2} - 1) + (e^{x_1} - 1)(e^{ax_2} - 1)(e^{bx_2} - 1)$$

y

$$f_{1, a} + f_{1, b} - f_{1, a+b} \in IE.$$

Así, $f = f_{1, c} + h$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $h \in IE$. Si $f \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$, es $f_{1, c} \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$. Si c no fuese 0, tenemos que el desarrollo en serie de potencias de $f_{1, c}$ es $\varphi_\sigma + x_1 x_2 s$ con $s \in \hat{R}$, luego $\varphi_\sigma \in \hat{\mathbf{m}}\hat{R}$ y, como es homogénea de grado 2, es $\varphi_\sigma \in S_1 R_1 + S_2$. Sin embargo, $\pi(\varphi_\sigma) = 1$ y $\pi(S_1 R_1 + S_2) = 0$. Por tanto, tiene que ser $c = 0$ y $f = h \in IE$.

En el caso general de un cono σ d -dimensional con $d \geq 3$, podemos elegir coordenadas para escribir σ como $\cap_{i=1}^d (x_i \geq 0)$. Así, el $\mathbb{Z}[V^*]$ -módulo E_{σ° está generado por funciones f_{a_1, \dots, a_d} con $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ dadas por

$$f_{a_1, \dots, a_d}(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} \prod_{i=1}^d (e^{a_i x_i} - 1) & \text{si } x_1 \geq 0, \dots, x_d \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Observamos que

$$f_{a_1, \dots, a_d}(x_1, \dots, x_d) = f_{a_1, a_2}(x_1, x_2) f_{a_3, \dots, a_d}(x_3, \dots, x_d)$$

(con las notaciones obvias). Así, usando $(\star\star)$ repetidamente, obtenemos que

$$f_{a_1, \dots, a_d} - f_{1, \dots, 1, a_1 \dots a_d} \in IE.$$

El resto de la prueba es análogo a los dos casos anteriores. \square

Corolario 3.2.13. Las inclusiones $R^{\text{int}} \rightarrow \hat{R}^{\text{int}} \leftarrow E$ inducen isomorfismos

$$R^{\text{int}}/\mathbf{m}R^{\text{int}} \rightarrow \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}} \leftarrow E/IE$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $R^{\text{int}}/\mathbf{m}R^{\text{int}} \subseteq \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}}$. Ahora, dado $f \in \hat{R}^{\text{int}}$, es $f \in \hat{R}_\Sigma^{\text{int}}$ para algún abanico simplicial Σ . Podemos escribir f como suma infinita de componentes homogéneas, de forma que $f = \sum_i f_i$ con $f_i \in R_{\Sigma, i}^{\text{int}}$. Para $i \geq d + 1$, es $R_{\Sigma, i}^{\text{int}} = R_{\Sigma, i}$, y como R_Σ está generado por elementos homogéneos de grados $0, 1, \dots, d$, es

$$f_i = h_1 g_1 + \dots + h_r g_r$$

con $g_1, \dots, g_r \in R_\Sigma$ los generadores homogéneos de grado $\leq d$, y por tanto $h_1, \dots, h_r \in S$ homogéneos de grado $\geq i - d \geq 1$. Así, en el cociente, la clase de f_i es 0, y tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i + \mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}} = \sum_{i=0}^d f_i + \mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}} = \sum_{i=0}^d f_i + \mathbf{m}R^{\text{int}}.$$

Por otra parte, la inclusión $E \hookrightarrow \hat{R}^{\text{int}}$ es inyectiva, luego el núcleo de la aplicación $E \rightarrow \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}}$ es $E \cap \mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}} = E \cap \mathbf{m}\hat{R} = IE$ y la aplicación $E/IE \rightarrow \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}}$ es inyectiva. Además, como E es denso en \hat{R}^{int} , dado $f \in \hat{R}^{\text{int}}$, existe $g \in E$ con $f - g \in R_{\geq 1}^{\text{int}} = R_{\geq 1} \subseteq \mathbf{m}R = \mathbf{m}R^{\text{int}}$, y $E \rightarrow \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}}$ es sobreyectiva. Por tanto, $E/IE \rightarrow \hat{R}^{\text{int}}/\mathbf{m}\hat{R}^{\text{int}}$ también lo es. \square

3.3. Relación con el álgebra de politopos

Consideramos \mathcal{P} el conjunto de politopos en V^* , y denotamos por $\tilde{\Pi}$ al grupo abeliano generado por \mathcal{P} con las relaciones (V). Dotamos a $\tilde{\Pi}$ de la multiplicación dada por $[P][Q] = [P + Q]$, que sabemos está bien definida. Además, el grupo de traslaciones V^* actúa en $\tilde{\Pi}$ por automorfismos dados por $e^x[P] = [x][P] = [P + x]$, y Π es un álgebra sobre $\mathbb{Z}[V^*]$. Además, $\tilde{\Pi}$ está equipado de un homomorfismo de anillos $\deg : \tilde{\Pi} \rightarrow \mathbb{Z}$ que manda la clase de cualquier politopo al 1.

Dado un politopo P en V , consideramos su funcional soporte $H_P : V \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que H_P es una función continua lineal por conos en el abanico normal de P . Dado un abanico completo Σ en V , denotamos por \mathcal{P}_Σ al conjunto de $P \in \mathcal{P}$ cuya función H_P es lineal en cada cono de Σ . Tenemos que \mathcal{P}_Σ es cerrado bajo la suma de Minkowski. Si Σ es el abanico normal de algún politopo P , entonces \mathcal{P}_Σ es, de hecho, el conjunto de sumandos de Minkowski de un múltiplo de P . Denotamos por $\tilde{\Pi}_\Sigma$ al subgrupo de $\tilde{\Pi}$ generado por \mathcal{P}_Σ ; tenemos que $\tilde{\Pi}_\Sigma$ es una $\mathbb{Z}[V^*]$ -subálgebra de $\tilde{\Pi}$.

Proposición 3.3.1. *Para cualquier abanico completo Σ , la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \gamma : \mathcal{P}_\Sigma & \longrightarrow & E_\Sigma \\ P & \longmapsto & e^{H_P} \end{array}$$

induce un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{Z}[V^]$ -álgebras $\gamma : \tilde{\Pi}_\Sigma \rightarrow E_\Sigma$. Si además Σ es el abanico normal de un politopo simple, este homomorfismo es sobreyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Si $P, Q \in \mathcal{P}$ son dos politopos con $P \cup Q \in \mathcal{P}$, tenemos que

$$H_{P \cup Q}(v) = \max_{x \in P \cup Q} x(v) = \max \left\{ \max_{x \in P} x(v), \max_{x \in Q} x(v) \right\} = \max\{H_P(v), H_Q(v)\},$$

luego $H_{P \cup Q} = \max\{H_P, H_Q\}$. Además, como $(P \cup Q) + (P \cap Q) = P + Q$, $H_{P \cup Q} + H_{P \cap Q} = H_P + H_Q$ y $H_{P \cap Q} = \min\{H_P, H_Q\}$. Así,

$$e^{H_{P \cup Q}} + e^{H_{P \cap Q}} = e^{H_P} + e^{H_Q}, \text{ i.e., } \gamma(P \cup Q) + \gamma(P \cap Q) = \gamma(P) + \gamma(Q).$$

Así, γ se extiende de forma única a un homomorfismo de grupos $\gamma : \tilde{\Pi} \rightarrow E$. Claramente, γ lleva $\tilde{\Pi}_\Sigma$ en E_Σ . Además, tenemos que

$$\gamma(P + Q) = e^{H_{P+Q}} = e^{H_P + H_Q} = e^{H_P} e^{H_Q} = \gamma(P) \gamma(Q),$$

y γ es un homomorfismo de anillos. Finalmente, $\gamma(x) = e^x$ para cualquier politopo 0-dimensional x , luego

$$\gamma(e^x[P]) = \gamma([x][P]) = \gamma(x) \gamma(P) = e^x \gamma([P]),$$

y es $\gamma(uv) = u \gamma(v)$ para $u \in \mathbb{Z}[V^*]$, $v \in \tilde{\Pi}_\Sigma$, esto es, γ es homomorfismo de $\mathbb{Z}[V^*]$ -álgebras.

Que γ es inyectiva es una mera comprobación, se puede consultar en [Bri97, Proposición 5.1].

Para comprobar la sobreyectividad de $\gamma : \tilde{\Pi}_\Sigma \rightarrow E_\Sigma$ en el caso de que Σ sea el abanico normal de un politopo simple P , recordemos que E_Σ está generado por las funciones e^f con f una función continua lineal por conos en Σ . Así, para una tal función f y $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, la función $f + tH_P = f + H_{tP}$ es estrictamente convexa en Σ , y $f + H_{tP} = H_Q$ para algún $Q \in \mathcal{P}_\Sigma$. Ahora, $e^f = e^{H_Q} e^{-H_{tP}}$ está en la imagen de γ ; en efecto, $[tP]$ es invertible en $\tilde{\Pi}_\Sigma$ y $\gamma([tP]^{-1}) = e^{-H_{tP}}$. \square

El álgebra de politopos Π es el cociente de $\tilde{\Pi}$ por el ideal $I\tilde{\Pi}$; esto es, estamos añadiendo a $\tilde{\Pi}$ las relaciones $e^x[P] = [P + x] = [P]$ para $P \in \mathcal{P}$ y $x \in V^*$. Así,

Teorema 3.3.2. *El álgebra de politopos es isomorfa al cociente de R^{int} por su ideal $\mathfrak{m}R^{int}$. El isomorfismo manda la clase de un politopo $[P]$ a la imagen en el cociente de $\sum_{n=0}^d \frac{H_P^n}{n!}$, donde H_P es el funcional soporte de P .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición anterior, tenemos un isomorfismo $\Pi \rightarrow E/IE$ inducido por $\gamma : P \mapsto e^{H_P}$. Ahora, del Corolario 3.2.13, por el $E/IE \rightarrow \hat{R}^{int}/\mathfrak{m}\hat{R}^{int}$, la clase de e^{H_P} va a la clase de $\sum_{n=0}^\infty \frac{H_P^n}{n!}$, y por el isomorfismo $R^{int}/\mathfrak{m}R^{int} \rightarrow \hat{R}^{int}/\mathfrak{m}\hat{R}^{int}$, a la clase de $\sum_{n=0}^d \frac{H_P^n}{n!}$. \square

Así, deducimos como consecuencia de este isomorfismo el Teorema 1 de [McM89] sobre la estructura del álgebra de politopos:

Corolario 3.3.3. *Existe una descomposición única del álgebra de politopos Π dada por*

$$\Pi = \Xi_0 \oplus \Xi_1 \oplus \dots \oplus \Xi_d$$

donde $\Xi_0 \simeq \mathbb{Z}$ vía \deg , y Ξ_1, \dots, Ξ_d son \mathbb{R} -espacios vectoriales con $[tP] = \sum_{j=0}^d t^j [P]_j$ para $[P] = \sum_{j=0}^d [P]_j$, $[P]_j \in \Xi_j$, $t > 0$. Además, tenemos que $\Xi_i \Xi_j = \Xi_{i+j}$, y el \mathbb{R} -espacio vectorial Ξ_d es 1-dimensional.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[P] \in \Pi$ la clase de un politopo $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Identificamos $[P]$ con la clase de $\sum_{j=0}^d \frac{H_P^j}{j!}$ en $R^{int}/\mathfrak{m}R^{int}$. Ahora, tenemos que cada clase $\frac{H_P^j}{j!}$ define un elemento en Π , al que denotamos por $[P]_j$. Así, es $[P] = [P]_0 + [P]_1 + \dots + [P]_d$. Si definimos Ξ_j como el subespacio de Π generado por las clases de H_P^j con $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, tenemos que

$$\Pi = \Xi_0 \oplus \Xi_1 \oplus \dots \oplus \Xi_d.$$

Como $H_P \equiv 1$, tenemos que $[P]_0 = 1$ para todo politopo $P \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$ y es $\Xi_0 \simeq \mathbb{Z}$. Es claro que cada Ξ_j con $1 \leq j \leq d$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Ahora, dado $t > 0$, es

$$[tP] = \sum_{j=0}^d \frac{H_{tP}^j}{j!} = \sum_{j=0}^d t^j \frac{H_P^j}{j!} = \sum_{j=0}^d t^j [P]_j.$$

Que $\Xi_{i+j} \subseteq \Xi_i \Xi_j$ es trivial, ya que $H_P^{i+j} = H_P^i H_P^j$. Para la otra inclusión, como $H_P^i H_Q^j$ es una función homogénea de grado $i+j$, si es $H_P^i H_Q^j = [K_1] + \dots + [K_r]$ con $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$, entonces la suma de las partes homogéneas de grados distintos a $i+j$ tiene que ser nula y podemos tomar $[K_1], \dots, [K_r] \in \Xi_{i+j}$. Finalmente, sabemos que la parte homogénea de grado d de $R^{int}/\mathfrak{m}R^{int}$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 1, luego también lo es Ξ_d . \square

Aunque no aparece de forma explícita en el artículo de M. Brion, tenemos resultados similares para el álgebra de politopos de un politopo simple P :

Teorema 3.3.4. *El álgebra de politopos de un politopo simple P es isomorfa al cociente de R_Σ^{int} por su ideal $\mathfrak{m}R_\Sigma^{int}$, donde Σ es el abanico normal de P . El isomorfismo manda la clase de un sumando débil de Minkowski de P , $[Q]$, a la imagen en el cociente de $\sum_{n=0}^d \frac{H_Q^n}{n!}$, donde H_Q es el funcional soporte de Q , que es una función continua lineal por conos en Σ .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es idéntica a la del Teorema anterior, teniendo en cuenta que los isomorfismos del Corolario 3.2.13 inducen isomorfismos para las respectivas álgebras E_Σ , \hat{R}_Σ^{int} y R_Σ^{int} . \square

Corolario 3.3.5. *Existe una descomposición única del álgebra de politopos $\Pi(P)$ de un politopo simple P dada por*

$$\Pi(P) = \Xi_0(P) \oplus \Xi_1(P) \oplus \dots \oplus \Xi_d(P)$$

donde $\Xi_0(P) \simeq \mathbb{Z}$ vía \deg , y $\Xi_1(P), \dots, \Xi_d(P)$ son \mathbb{R} -espacios vectoriales con $[tQ] = \sum_{j=0}^d t^j [Q]_j$ para $[Q] = \sum_{j=0}^d [Q]_j$, $[Q]_j \in \Xi_j(P)$, $t > 0$. Además, tenemos que $\Xi_i(P)\Xi_j(P) = \Xi_{i+j}(P)$, el \mathbb{R} -espacio vectorial $\Xi_d(P)$ es 1-dimensional, y la dimensión de $\Xi_j(P)$ es $h_j(P)$.

CAPÍTULO 4

Demostración del Teorema g

Índice

4.1. Funciones polinomiales en el abanico normal de un politopo	39
4.1.1. Subabanicos y abanicos con borde	41
4.2. Teorema Duro de Lefschetz y Relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski	42
4.3. Flips y cohomología	43

Sea Σ un abanico simplicial completo en $V \simeq \mathbb{R}^d$ un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión d . Como hemos visto, si S es el anillo de funciones polinomiales globales en V , \mathfrak{m} es el ideal maximal de S generado por las funciones homogéneas lineales y R_Σ es el anillo de las funciones continuas polinomiales por conos en Σ , R_Σ tiene estructura de S -álgebra. Además, tenemos el isomorfismo

$$R_\Sigma / \mathfrak{m} R_\Sigma \simeq \bigoplus_{j=0}^d H^{j,j}(\Sigma),$$

por lo que $R_\Sigma / \mathfrak{m} R_\Sigma$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial graduado de dimensión finita. Lo denotamos por

$$H(\Sigma) = H^0(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma) \oplus \dots \oplus H^d(\Sigma).$$

Como hemos visto, si Σ es el abanico normal de un politopo simple, tenemos que

$$\dim_{\mathbb{R}} H^j(\Sigma) = \dim_{\mathbb{R}} (H^{j,j}(\Sigma)) = h_j(P).$$

y tenemos una \mathbb{R} -álgebra cuya sucesión de Hilbert es $h(P) = (h_0(P), h_1(P), \dots, h_d(P))$. Así, vamos a demostrar el Teorema g para politopos a través del álgebra de las funciones continuas polinomiales por conos.

4.1. Funciones polinomiales en el abanico normal de un politopo

Sea Σ el abanico normal de un politopo simple. Vamos a comenzar dando una técnica para construir explícitamente bases de $H(\Sigma)$ como espacio vectorial graduado (comprobando, entre otras cosas, que efectivamente es $\dim H^k(\Sigma) = h_k(P)$). Para ello, vamos a construir, a partir de un shelling de Σ , una base del S -módulo libre R_Σ que inducirá una base de $H(\Sigma)$. Recuperamos la idea de la demostración de las ecuaciones de Dehn-Sommerville. Recordemos que un shelling de un complejo o un abanico simplicial es una ordenación $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ de sus facetas de forma que para cada i , $2 \leq n$, se tiene que $\sigma_i \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{i-1})$ es una unión de caras de codimensión 1 del complejo o abanico.

Sea Σ el abanico normal del politopo simple P con n vértices. Sea v un vector tal que $v \cdot x \neq v \cdot y$ para todo par de vértices x e y de P . Si consideramos el semiespacio móvil $H^-(v, t)$, a medida que t crece induce un orden en los vértices, x_1, \dots, x_n , de forma que $v \cdot x_i = t_i$ con $t_1 < \dots < t_n$. Denotamos por m_i al tipo de x_i con respecto a v , esto es, el número de aristas que contienen a m_i que están contenidas en $H^-(v, t_i)$. Los n vértices de P se corresponden con los n conos maximales de Σ , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, donde σ_i es el cono normal de x_i .

Lema 4.1.1. *Con las notaciones anteriores, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ es un shelling de Σ .*

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que

$$\sigma_i \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{i-1}) = (\sigma_1 \cap \sigma_i) \cup \dots \cup (\sigma_{i-1} \cap \sigma_i)$$

es una unión de conos de dimensión $d - 1$ para todo i . Si dos vértices en P están unidos por una arista, los correspondientes conos maximales de Σ tienen una faceta en común.

Sea $j < i$. Si hay una arista que une x_i con x_j , entonces $\sigma_i \cap \sigma_j$ es una faceta común a los dos conos. Si no la hay, sea F_{ij} la cara más pequeña de P que contiene a x_i y x_j (es única porque, si hubiera dos, la intersección sería una cara menor que también contiene a los dos vértices). Tenemos que en F_{ij} hay un

vértice x_k adyacente a x_i con $k < i$, ya que si todas las aristas de F_{ij} que contienen a x_i estuvieran en $H^+(v, t_i)$, sería $F_{ij} \subseteq H^+(v, t_i)$ y $x_j \in H^-(v, t_j)$. Por lo tanto, $\sigma_i \cap \sigma_j \subset \sigma_i \cap \sigma_k$. Así, $\sigma_i \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{i-1})$ es unión de m_i conos de codimensión 1 (correspondientes a las m_i aristas que contienen a x_i que están en $H^-(v, t_j)$). \square

Para cada cono maximal σ_i , tomamos la función g_i continua polinomial por conos homogénea de grado mínimo de forma que g_i no se anule en σ_i pero sí en todos los conos anteriores $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ (tal función es única salvo producto por constantes, y su grado resulta ser el parámetro m_i de la demostración anterior). Veamos cómo construirla.

Para $i = 1$, tomamos g_1 la función idénticamente 1 en todos los conos. Para $i > 1$, si hay una arista que une v_j con v_i , $j < i$, sea ρ_j el rayo de σ_i que no está en la faceta $\sigma_i \cap \sigma_j$; para cada j que verifique lo anterior, tomamos una función característica φ_j del rayo ρ_j (esto es, una función de Courant positiva), y g_i es el producto de estas funciones; decimos que es una función característica de la cara τ que generan los rayos. Efectivamente, es una función homogénea de grado m_i , ya que es producto de m_i funciones homogéneas de grado 1; no se anula en σ_i porque, como ρ_j está en σ_i , φ_j no es nula en σ_i ; y sí se anula en todos los conos anteriores porque para cada j existe un rayo ρ_k que no está contenido en σ_j , y φ_k se anula en σ_j .

Lema 4.1.2. *Con las notaciones anteriores, g_1, \dots, g_n forman una base del S -módulo libre R_Σ . Además, sus clases módulo $\mathfrak{m}R_\Sigma$ forman una base del \mathbb{R} -espacio vectorial $H(\Sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos que g_1, \dots, g_n generan R_Σ como S -módulo. Sea $f \in R_\Sigma$ una función continua polinomial por conos en Σ . Construyamos inductivamente funciones h_1, \dots, h_n de forma que $f = g_1 h_1 + \dots + g_n h_n$.

Suponiendo que $g_1 = 1$, tomamos h_1 la función polinomial global asociada a f en el cono σ_1 . Tenemos que $f - h_1 g_1$ es una función continua polinomial por conos que se anula en σ_1 . Supongamos que hemos construido h_1, \dots, h_{i-1} de forma que $f_i = f - h_1 g_1 - \dots - h_{i-1} g_{i-1}$ es una función continua polinomial por conos que se anula en $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$, con $i \leq n$. Para cada $j < i$ de forma que $\sigma_i \cap \sigma_j$ sea una faceta común a ambos conos, como $(f_i)_{\sigma_i \cap \sigma_j} \equiv 0$, $(f_i)_{\sigma_i}$ se anula en el hiperplano que contiene a $\sigma_i \cap \sigma_j$, y es múltiplo de la forma lineal que define al hiperplano; esto es, f_i es múltiplo de φ_j . Así, como las funciones φ_j son homogéneas de grado 1, es f_i múltiplo de g_i , y tenemos que existe $h_i \in S$ con $f_i - h_i g_i$ continua polinomial por conos que se anula en $\sigma_1, \dots, \sigma_i$.

Para ver que son linealmente independientes, si $g_1 h_1 + \dots + g_n h_n = 0$, como la única función no nula en σ_1 es g_1 , tiene que ser $h_1 = 0$. Procediendo inductivamente, si $g_i h_i + \dots + g_n h_n = 0$, como la única función de g_j , $j \geq i$, no nula en σ_i es g_i , tiene que ser $h_i = 0$. Por tanto, es $h_1 = \dots = h_n = 0$.

Sea ahora $\bar{f} \in H(\Sigma)$ la clase de una función $f \in R_\Sigma$. Como existen $h_1, \dots, h_n \in S$ tales que $f = g_1 h_1 + \dots + g_n h_n$, pasando al cociente tenemos

$$\bar{f} = \bar{h}_1 \bar{g}_1 + \dots + \bar{h}_n \bar{g}_n = h_1(0) \bar{g}_1 + \dots + h_n(0) \bar{g}_n = \lambda_1 \bar{g}_1 + \dots + \lambda_n \bar{g}_n$$

y tenemos generadores $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ de $H(\Sigma)$. Además, son independientes, ya que, si

$$\lambda_1 \bar{g}_1 + \dots + \lambda_n \bar{g}_n = 0,$$

entonces $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \in \mathfrak{m}R_\Sigma$. Así, existen funciones $\ell_1, \dots, \ell_r \in \mathfrak{m}$ y $f_1, \dots, f_r \in R_\Sigma$ con

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = \ell_1 f_1 + \dots + \ell_r f_r.$$

Para cada f_i , existen $h_{i1}, \dots, h_{in} \in S$ con $f_i = g_1 h_{i1} + \dots + g_n h_{in}$. Por tanto,

$$(\lambda_1 - \ell_1 h_{11} - \dots - \ell_r h_{r1}) g_1 + \dots + (\lambda_n - \ell_1 h_{1n} - \dots - \ell_r h_{rn}) g_n = 0$$

y cada $\lambda_i - \ell_1 h_{1i} - \dots - \ell_r h_{ri} = 0$. Como el término independiente de este polinomio es λ_i (ya que los demás sumandos no tienen término independiente por ser $\ell_j \in \mathfrak{m}$), tenemos $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. \square

Tenemos entonces una base dada por las clases de g_1, \dots, g_n en $H(\Sigma)$. Además, como g_i es homogénea de grado m_i , tenemos que $g_i \in R_{\Sigma, m_i}$ y $\bar{g}_i \in H^{m_i}(\Sigma)$, con lo que $\dim H^k(\Sigma) = h_k(P)$; el número de generadores de grado k es el número de vértices de tipo k de P .

Recordamos que tenemos una aplicación $\pi_\Sigma : R_\Sigma \rightarrow S$ que es S -lineal y homogénea de grado $-d$ de forma que $\pi_\Sigma(\varphi_\sigma) = 1$ para todo cono maximal $\sigma \in \Sigma$. Si tomamos generadores g_1, \dots, g_n de R_Σ , tenemos que

$$\pi_\Sigma(f_1 g_1 + \dots + f_n g_n) = f_1 \pi_\Sigma(g_1) + \dots + f_n \pi_\Sigma(g_n).$$

Como el único vértice de tipo d de P es v_n , tenemos que $\pi_\Sigma(g_i) = 0$ para $i < n$ por ser g_i homogéneo de grado $m_i < d$, y, como g_n es producto de funciones características de los rayos de σ_n y positiva en el interior, es $g_n = \alpha \varphi_{\sigma_n}$ con $\alpha > 0$. Así,

$$\pi_\Sigma(f_1 g_1 + \dots + f_n g_n) = \alpha f_n.$$

Si denotamos por S_n al S -submódulo de R_Σ generado por g_n , tenemos la aplicación $\pi_\Sigma : S_n \rightarrow S$. Si componemos con la proyección $S \rightarrow S/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_\Sigma : S_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f g_n &\longmapsto \alpha f(0) \end{aligned}$$

sobreyectiva y con núcleo $\{f g_n \in S_n : f(0) = 0\} = \{f g_n \in S_n : f \in \mathfrak{m}\} = \mathfrak{m} S_n$. Así, como $S_n/\mathfrak{m} S_n \simeq H^d(\Sigma)$, tenemos el isomorfismo $\langle \cdot \rangle_\Sigma : H^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle g_n \rangle_\Sigma = \alpha$.

Proposición 4.1.3. *Los emparejamientos*

$$\begin{aligned} H^k(\Sigma) \times H^{d-k}(\Sigma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\bar{f}, \bar{g}) &\longmapsto \langle f \cdot g \rangle \end{aligned}$$

son no degenerados para todo k .

DEMOSTRACIÓN. Sea g_1, \dots, g_n una base de $H(\Sigma)$ dada por un shelling $\sigma_1 < \dots < \sigma_n$, y sea g'_1, \dots, g'_n otra base de $H(\Sigma)$ dada por el shelling contrario, $\sigma_n < \dots < \sigma_1$, donde denotamos g'_i a la función que es no nula en σ_i y nula en $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$.

Si $i > j$, tenemos que g_i se anula en los conos $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ y g'_j se anula en los conos $\sigma_n, \dots, \sigma_{j+1}$. Por tanto, $g_i g'_j = 0$ y $\langle g_i g'_j \rangle_\Sigma = 0$.

Si $i = j$, tenemos que $g_i g'_i$ es el producto de todas las ecuaciones de las facetas de σ_i positivas en su interior, así que es $g_i g'_i = \alpha \varphi_{\sigma_i}$ con $\alpha > 0$ y $\langle g_i g'_i \rangle_\Sigma = \alpha \neq 0$.

Ahora, si $h = h_k(P) = h_{d-k}(P)$ y g_{i_1}, \dots, g_{i_h} es una base de $H^k(\Sigma)$ con $i_1 < \dots < i_h$, $g'_{i_1}, \dots, g'_{i_h}$ lo es de $H^{d-k}(\Sigma)$ y la matriz de $\langle \cdot \rangle_\Sigma$ con respecto a estas bases es triangular superior con elementos positivos en la diagonal. \square

4.1.1. Subabanicos y abanicos con borde. Consideramos ahora un cono no maximal $\tau \in \Sigma$ y el abanico $\Delta = \text{st}(\tau)$, que es un subabanico de Σ . Sea π la proyección lineal con dirección $L(\tau)$ (y base cualquier subespacio complementario). La imagen de Δ bajo π es un abanico completo Λ en $\pi(\mathbb{R}^d)$. Así, el pullback de funciones lineales por conos (dadas por elementos del dual) nos da una aplicación S -lineal

$$\mathbb{R}_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_\Delta.$$

La aplicación inducida en las cohomologías es un isomorfismo. Para verlo, podemos elegir un shelling de Σ que comience con los conos maximales de Δ , y por tanto nos da un shelling de Δ . Así, el mismo argumento que hicimos para el abanico completo nos da un conjunto de generadores del S -módulo libre R_Δ . Como los conos maximales de Δ se corresponden con conos maximales de Λ , el shelling de Δ induce un shelling de Λ , y por tanto un conjunto de generadores de R_Λ como S -módulo libre. Mediante el pullback, los generadores de R_Λ se corresponden con los de R_Δ , y por tanto manda una base de $H(\Lambda)$ en una base de $H(\Delta)$.

Sea ahora $R_{\Delta, \partial \Delta} \subset R_\Delta$ el espacio de las funciones continuas polinomiales por conos en Δ que se anulan en su borde. Esto es, de nuevo, un S -módulo. Un conjunto de generadores se puede encontrar eligiendo un shelling de Σ que acabe con los conos maximales de Δ . Los últimos generadores forman entonces un conjunto de generadores para $R_{\Delta, \partial \Delta}$. Se puede ver, a partir de estos generadores o directamente de la definición, que

$$R_{\Delta, \partial \Delta} = \varphi_\tau R_\Delta$$

(donde φ_τ es una función característica de τ). En particular, si definimos $H(\Delta, \partial \Delta) = R_{\Delta, \partial \Delta}/\mathfrak{m} R_{\Delta, \partial \Delta}$,

$$H^k(\Delta, \partial \Delta) = \varphi_\tau H^{k-\dim \tau}(\Delta).$$

Sea $\Gamma = \Sigma \setminus \text{st}(\tau)$. Se trata de un abanico con borde, y podemos considerar el anillo R_Γ de funciones continuas polinomiales por conos en Γ y el subanillo $R_{\Gamma, \partial \Gamma}$ de funciones que se anulan en el borde de Γ . Los mismos shellings que dan los generadores de R_Δ y $R_{\Delta, \partial \Delta}$ nos dan generadores de $R_{\Gamma, \partial \Gamma}$ y R_Γ , respectivamente, como S -módulos libres. Así, tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow R_{\Gamma, \partial \Gamma} \longrightarrow R_\Sigma \longrightarrow R_\Delta \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow R_{\Delta, \partial \Delta} \longrightarrow R_\Sigma \longrightarrow R_\Gamma \longrightarrow 0,$$

que inducen sucesiones exactas cortas en los respectivos cocientes.

Por último, veamos la relación de la aplicación de evaluación en $H(\Delta, \partial\Delta)$ y $H(\Lambda)$.

Proposición 4.1.4. *Con las notaciones anteriores, si σ es un cono maximal de Δ , existen unidades de volumen en \mathbb{R}^d y $\pi(\mathbb{R}^d)$ tales que $\varphi_\sigma = \varphi_\tau \pi^*(\varphi_\lambda)$ para algún cono maximal $\lambda \in \Lambda$. Además, para $f \in R_\Lambda$, se tiene*

$$\langle \varphi_\tau \pi^*(f) \rangle_\Sigma = \langle f \rangle_\Lambda.$$

DEMOSTRACIÓN. Si σ es un cono maximal de Δ , sus rayos son todos los de τ y otros que forman una cara τ' . Por tanto, φ_σ es, salvo constante, el producto de funciones características de todos los rayos de σ y es, por tanto, $\varphi_\sigma = \alpha \varphi_\tau \cdot \varphi'_{\tau'}$. Ahora, como τ' se corresponde por π con un cono maximal $\lambda \in \Lambda$, si tomamos un shelling de Λ que acabe en λ , tenemos uno de Δ que acaba en σ y el generador φ_λ se identifica con $\pi^*(\varphi_\lambda) = \beta \varphi'_{\tau'}$ (ya que todos los rayos de τ están en conos anteriores). Así,

$$\varphi_\sigma = \alpha \varphi_\tau \cdot \varphi'_{\tau'} = \alpha \beta^{-1} \varphi_\tau \pi^*(\varphi_\lambda),$$

y podemos elegir formas de volumen apropiadas para hacer $\alpha \beta^{-1} = 1$.

Sea ahora $f \in R_\Lambda$. Tomamos un shelling de Σ que termine en los conos de Δ y, en particular, que acabe con σ . Este shelling induce uno en Λ que acaba en $\pi(\sigma) = \lambda$. Por tanto, tenemos generadores $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r, \varphi_\lambda$ de R_Λ de forma que φ_λ es el de grado máximo, y existen $f_1, \dots, f_r, f_\lambda \in S$ con

$$f = f_1 \tilde{g}_1 + \dots + f_r \tilde{g}_r + f_\lambda \varphi_\lambda.$$

Así, tenemos que

$$\pi_\Lambda(f) = f_1 \pi_\Lambda(\tilde{g}_1) + \dots + f_r \pi_\Lambda(\tilde{g}_r) + f_\lambda \pi_\Lambda(\varphi_\lambda) = f_\lambda.$$

Por otra parte, tenemos

$$\pi_\Sigma(\varphi_\tau \pi^*(f)) = \pi_\Sigma(\varphi_\tau (f_1 \pi^*(\tilde{g}_1) + \dots + f_r \pi^*(\tilde{g}_r) + f_\lambda \pi^*(\varphi_\lambda))) = f_\lambda \pi_\Sigma(\varphi_\tau \pi^*(\varphi_\lambda)) = f_\lambda,$$

y por tanto

$$\langle \varphi_\tau \pi^*(f) \rangle_\Sigma = f_\lambda(0) = \langle f \rangle_\Lambda.$$

□

4.2. Teorema Duro de Lefschetz y Relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski

La herramienta principal para la demostración de Teorema g , siguiendo la estrategia de [Sta80], es el Teorema Duro de Lefschetz:

Teorema 4.2.1 (Teorema Duro de Lefschetz). *Sea ℓ una función estrictamente convexa lineal por conos en un abanico simplicial completo Σ . Sea R_Σ el anillo de funciones continuas polinomiales por conos en Σ , y sea $H(\Sigma)$ su cociente por el ideal generado por las funciones lineales globales, con la graduación dada por el grado. Entonces ℓ define una operación de Lefschetz en $H(\Sigma)$; esto es, la multiplicación por*

$$\ell^{d-2k} : H^k(\Sigma) \longrightarrow H^{d-k}(\Sigma)$$

es un isomorfismo para $0 \leq k \leq \frac{1}{2}d$.

Dada una función continua lineal por conos $\ell \in H^1(\Sigma)$, definimos en cada $H^k(\Sigma)$ con $0 \leq k \leq \frac{1}{2}d$ la forma cuadrática asociada a ℓ

$$Q_\ell : \begin{array}{ccc} H^k(\Sigma) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & Q_\ell(h) = \langle \ell^{d-2k} h \cdot h \rangle \end{array},$$

donde $\langle \cdot \rangle : H^d(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el isomorfismo dado por la aplicación de evaluación. Consideramos también, para cada k con $0 \leq k \leq \frac{1}{2}d$, el espacio

$$PH^k(\Sigma) := \ker(\ell^{d-2k+1} : H^k(\Sigma) \longrightarrow H^{d-k+1}(\Sigma)).$$

Con estas notaciones, tenemos el siguiente resultado, que es más fuerte que el Teorema Duro de Lefschetz, como veremos más abajo (Proposición 4.2.3).

Teorema 4.2.2 (Relaciones bilineales de Hodge-Riemann-Minkowski). *Sea ℓ una función estrictamente convexa lineal por conos en un abanico simplicial completo Σ . Para cada k con $0 \leq k \leq \frac{1}{2}d$, la forma cuadrática $(-1)^k Q_\ell$ es definida positiva en $PH^k(\Sigma)$.*

Veamos una formulación equivalente de este último Teorema, que nos será útil a la hora de demostrarlo. Para ello, recordemos un par de nociones relacionadas con formas bilineales y cuadráticas.

Sea $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica en un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimension finita V . Dada una base de V , existe una matriz A simétrica de forma que $B(x, y) = x^T A y$. Esta forma bilineal induce una forma cuadrática $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x) = B(x, x) = x^T A x$. Decimos que Q es no degenerada si la matriz A es no singular; esto es equivalente a que, dado $x \in V$, si $B(x, y) = 0$ para todo $y \in V$ entonces

$x = 0$. Si Q es no degenerada, la matriz A solo tiene valores propios no nulos; además, como la matriz A es simétrica, son todos reales. Sean n_+ y n_- el número de valores propios de A positivos y negativos, respectivamente. Llamamos signatura de Q al par (n_+, n_-) , y lo denotamos por $\text{sign}(Q, V)$.

Proposición 4.2.3. *ℓ verifica las ecuaciones de Hodge-Riemann-Minkowski si y sólo si la forma cuadrática $Q_\ell : H^k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ es no degenerada y su signatura es*

$$\text{sign}(Q_\ell, H^k(\Sigma)) = \left(\sum_{0 \leq i \leq k, 2|i} \dim H^i(\Sigma) - \dim H^{i-1}(\Sigma), \sum_{0 \leq i \leq k, 2 \nmid i} \dim H^i(\Sigma) - \dim H^{i-1}(\Sigma) \right)$$

para todo $k \leq \frac{1}{2}d$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que ℓ define una operación de Lefschetz si y sólo si la forma Q_ℓ es no degenerada en todo $H^k(\Sigma)$.

Si la multiplicación por ℓ^{d-2k} es un isomorfismo, $\langle \ell^{d-2k} f \cdot g \rangle = 0$ para todo $g \in H^k(\Sigma)$ implica, por ser el emparejamiento $H^{d-k}(\Sigma) \times H^k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ no degenerado (Proposición 4.1.3), que $\ell^{d-2k} f = 0$, esto es, $f = 0$ y Q_ℓ es no degenerada.

Por otra parte, si Q_ℓ es no degenerada y $\ell^{d-2k} f = 0$, tenemos que $\langle \ell^{d-2k} f \cdot g \rangle = 0$ para todo $g \in H^k(\Sigma)$ y $f = 0$, con lo que $\ell^{d-2k} : H^k(\Sigma) \rightarrow H^{d-k}(\Sigma)$ es inyectiva y, por las ecuaciones de Dehn-Sommerville, un isomorfismo.

Ahora, si $(-1)^k Q_\ell$ es definida positiva en $PH^k(\Sigma)$ y $\ell^{d-2k} f = 0$, tenemos que $\ell^{d-2k+1} f = 0$, $f \in PH^k(\Sigma)$ y $Q_\ell(f) = \langle \ell^{d-2k} f \cdot f \rangle = \langle 0 \cdot f \rangle = 0$, con lo que es $f = 0$ y ℓ es Lefschetz. Por tanto, las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski implican que ℓ es Lefschetz y, por tanto, que Q_ℓ es no degenerada en cada $H^k(\Sigma)$.

Para la otra parte, veamos que

$$H^k(\Sigma) = \ell H^{k-1}(\Sigma) \oplus PH^k(\Sigma).$$

Sea $f \in H^k(\Sigma)$, tenemos que $\ell^{d-2k+1} f = g \in H^{d-k+1}$. Como cualquiera de los dos resultados implica que ℓ es Lefschetz, existe $f_1 \in H^{k-1}(\Sigma)$ con $g = \ell^{d-2(k-1)} f_1 = \ell^{d-2k+1} \ell f_1$, y

$$\ell^{d-2k+1} f = \ell^{d-2k+1} \ell f_1 \implies \ell^{d-2k+1} (f - \ell f_1) = 0,$$

con lo que $f - \ell f_1 = f_2 \in PH^k(\Sigma)$ y $f = \ell f_1 + f_2$. Además, si $0 = \ell f_1 + f_2$ con $f_1 \in H^{k-1}(\Sigma)$, $f_2 \in PH^k(\Sigma)$, tenemos que

$$0 = \ell^{d-2k+1} (\ell f_1 + f_2) = \ell^{d-2k+2} f_1 + \ell^{d-2k+1} f_2 = \ell^{d-2(k-1)} f_1$$

y, como ℓ es Lefschetz, $f_1 = 0$ y queda $f_2 = 0$, con lo que la suma es directa.

Observamos que $Q_\ell(\ell f) = Q_\ell(f)$ para todo $f \in H^{k-1}$ y que $\langle \ell^{d-2k} \ell f \cdot g \rangle = \langle \ell^{d-2k+1} g \cdot f \rangle = \langle 0 \cdot f \rangle = 0$ para $f \in H^{k-1}(\Sigma)$, $g \in PH^k(\Sigma)$. Así,

$$Q_\ell(\ell f + g) = Q_\ell(f) + Q_\ell(g),$$

con lo que la signatura de Q_ℓ en $H^k(\Sigma)$ es la suma de las signaturas en $H^{k-1}(\Sigma)$ y $PH^k(\Sigma)$, y la equivalencia se prueba inductivamente en k . \square

Proposición 4.2.4. *Para cada $t \in [a, b]$, sea $Q_t : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita V . Si cada Q_t es no degenerada y los coeficientes de la matriz asociada a Q_t son funciones continuas en t , entonces todas las formas Q_t tienen la misma signatura.*

DEMOSTRACIÓN. Fijada una base de V , dado $t \in [a, b]$, sea A_t la matriz asociada a Q_t respecto de esta base. Como Q_t es una forma no degenerada, todos los valores propios de A_t son no nulos. Además, como la matriz A_t es simétrica, son todos reales. Sean $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ los valores propios de A_t .

Como los valores propios de una matriz son continuos en las entradas de la matriz (ya que son las raíces de su polinomio característico, cuyos coeficientes son polinomios en las entradas de la matriz), las funciones $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Así, como $\lambda_i(t)$ es una función continua en $[a, b]$ que no se anula, y por tanto tiene el mismo signo para todo t en $[a, b]$, y todas las formas Q_t tienen la misma signatura. \square

4.3. Flips y cohomología

Veamos cómo transformar un abanico simplicial completo proyectivo en el abanico normal de un símplice mediante operaciones elementales llamadas flips. En cierto sentido, es un análogo combinatorio de la Teoría de Morse: estudiar propiedades globales de una variedad con los cambios locales que se producen al barrer la variedad con una función de Morse; esto es, una función diferenciable cuyos puntos críticos son no degenerados y tienen distinto valor crítico. La signatura del Hessiano de la función en estos puntos

indica los cambios topológicos que se producen. Lo que vamos a hacer aquí es barrer el politopo con un semiespacio y analizar los cambios combinatorios que se producen cuando el semiespacio atraviesa uno de los vértices del politopo, que se reflejan en cambios locales en su abanico normal.

De nuevo, sea P un d -politopo simple en \mathbb{R}^d con n vértices y sea v un vector tal que $v \cdot x \neq v \cdot y$ para todo par de vértices x e y de P . Consideramos la familia de politopos

$$P_t = P \cap \{x \in P : v \cdot x \geq t\}.$$

Esta familia induce una ordenación de los vértices, x_1, \dots, x_n ; sean $t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}$ de forma que $v \cdot x_i = t_i$. Al variar t , el politopo P_t atraviesa cambios combinatorios en los valores t_i . El cambio de $P_{t_i-\varepsilon}$ a $P_{t_i+\varepsilon}$ se llama flip. Notemos que tanto $P_{t_i-\varepsilon}$ como $P_{t_i+\varepsilon}$ son politopos simples, mientras que P_{t_i} en general no lo es. Esta construcción nos da una sucesión de flips que transforma cualquier politopo P en el símplice y luego en el politopo vacío.

La familia P_t de politopos define una familia de abanicos Σ_t con funciones convexas ℓ_t . Cuando t varía entre t_i y t_{i+1} los abanicos Σ_t no cambian; sí lo hacen las funciones ℓ_t . Cuando t atraviesa t_i , los abanicos también cambian por un flip. Para describir el flip de un abanico, sea $\sigma = \langle e_1, \dots, e_{d+1} \rangle$ el cono $(d+1)$ -dimensional en \mathbb{R}^{d+1} generado por vectores linealmente independientes e_1, \dots, e_{d+1} . Sea $1 \leq m \leq d$, escribimos el borde de σ como

$$\partial\sigma = \overline{\text{st}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle \cup \overline{\text{st}}\langle v_{m+1}, \dots, v_{d+1} \rangle,$$

donde tomamos la estrella cerrada en el abanico $\partial\sigma$. Existe una proyección $\pi : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow V$ que es inyectiva en $\overline{\text{st}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ y $\overline{\text{st}}\langle v_{m+1}, \dots, v_{d+1} \rangle$. Un flip en un abanico es el cambio de los abanicos $\pi(\overline{\text{st}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle)$ en $\Sigma_{t_i-\varepsilon}$ por $\pi(\overline{\text{st}}\langle v_{m+1}, \dots, v_{d+1} \rangle)$ en $\Sigma_{t_i+\varepsilon}$. Para indicar la elección de m , llamamos a un flip de esta forma m -flip.

Vamos a explicitar la proyección π asociada a un m -flip. Supongamos que el flip ocurre en t_i , y pasamos del abanico $\Sigma_{t_i-\varepsilon}$ a $\Sigma_{t_i+\varepsilon}$. Si el vértice x_i es de tipo $d-m$, en $P_{t_i-\varepsilon}$ hay $d-m$ vértices de la intersección de $H(v, t_i - \varepsilon)$ con las $d-m$ aristas de P que contienen a x_i y están en $H^-(v, t_i)$, y el propio vértice x_i , que desaparecen en $P_{t_i+\varepsilon}$. Aquí aparecen m vértices nuevos: la intersección de $H(v, t_i + \varepsilon)$ con el resto de aristas que contienen a x_i . Por tanto, entre $\Sigma_{t_i-\varepsilon}$ y $\Sigma_{t_i+\varepsilon}$ se intercambian los conos normales a los $d+1-m$ vértices que desaparecen en el paso de $P_{t_i-\varepsilon}$ a $P_{t_i+\varepsilon}$ por los conos normales a los m nuevos vértices de $P_{t_i+\varepsilon}$.

Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_{d+1-m}$ los conos normales a los $d+1-m$ primeros vértices y $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$ los conos normales a los m últimos. Como P es simple, x_i es la intersección de d facetas, digamos F_1, \dots, F_d . Supongamos que las $d-m$ aristas que contienen a x_i y que están en $H^-(v, t_i)$ son

$$F_1 \cap \dots \cap F_m \cap F_{m+2} \cap \dots \cap F_d, \dots F_1 \cap \dots \cap F_{d-1}.$$

Así, si F_t es la faceta $H(v, t) \cap P$ de P_t , tenemos que los $d+1-m$ vértices de $P_{t_i-\varepsilon}$ que desaparecen con el flip son

$$F_1 \cap \dots \cap F_d, F_1 \cap \dots \cap F_m \cap F_{t_i-\varepsilon} \cap F_{m+2} \cap \dots \cap F_d, \dots F_1 \cap \dots \cap F_{d-1} \cap F_{t_i-\varepsilon}.$$

Si llamamos v_i al vector normal de P en F_i para $1 \leq i \leq d$ y v_{d+1} al vector normal de P_t en F_t , tenemos que $\sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_{d+1-m}$ es el cono normal de la cara más pequeña que contiene a los primeros $d-m+1$ vértices, esto es, de $F_1 \cap \dots \cap F_m$, que es el cono simplicial generado por v_1, \dots, v_m . De forma idéntica, tenemos que $\sigma'_1 \cap \dots \cap \sigma'_m$ es el cono simplicial generado por v_{m+1}, \dots, v_{d+1} .

Así, definimos la aplicación π como $\pi(e_i) = v_i$, $1 \leq i \leq d+1$. De esta forma, tenemos que $\sigma_i = \pi(\text{pos}(v_1, \dots, v_{m+i-1}, v_{m+i+1}, \dots, v_{d+1}))$ para $1 \leq i \leq d+1-m$ y $\sigma'_i = \pi(\text{pos}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{d+1}))$ para $1 \leq i \leq m$. Así, el flip cambia $\sigma_1, \dots, \sigma_{d+1-m}$ por $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$, esto es, $\pi(\overline{\text{st}}\langle v_1, \dots, v_m \rangle)$ por $\pi(\overline{\text{st}}\langle v_{m+1}, \dots, v_{d+1} \rangle)$.

Notemos que un m -flip y un $(d+1-m)$ -flip son operaciones inversas (correspondientes a atravesar el mismo t_i con v y $-v$). La definición también tiene sentido para $m=0$ y $m=d+1$; estos flips pasan entre el abanico vacío y el abanico normal de un símplice, pero no necesitamos analizar este caso. Los casos $m=1$ y $m=d$ pasan de un cono simplicial a una subdivisión estelar del mismo; son los únicos flips que cambian el número de rayos del abanico.

En lo sucesivo, vamos a considerar un único flip. Para simplificar la notación, supongamos que el flip ocurre en $t=0$, cambiando Σ_{-1} por Σ_1 . Supondremos también que $1 \leq m \leq \frac{1}{2}(d+1)$ (si no fuera así, intercambiamos el papel de Σ_{-1} y Σ_1). El objetivo es probar que $Q_{\ell_{-1}}$ satisface las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski en Σ_{-1} si y sólo si Q_{ℓ_1} lo hace en Σ_1 . Así, la secuencia de flips construida anteriormente reduce el probar las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski para un abanico simplicial completo y proyectivo Σ arbitrario al caso del abanico normal de un símplice, y esta prueba se puede hacer directamente:

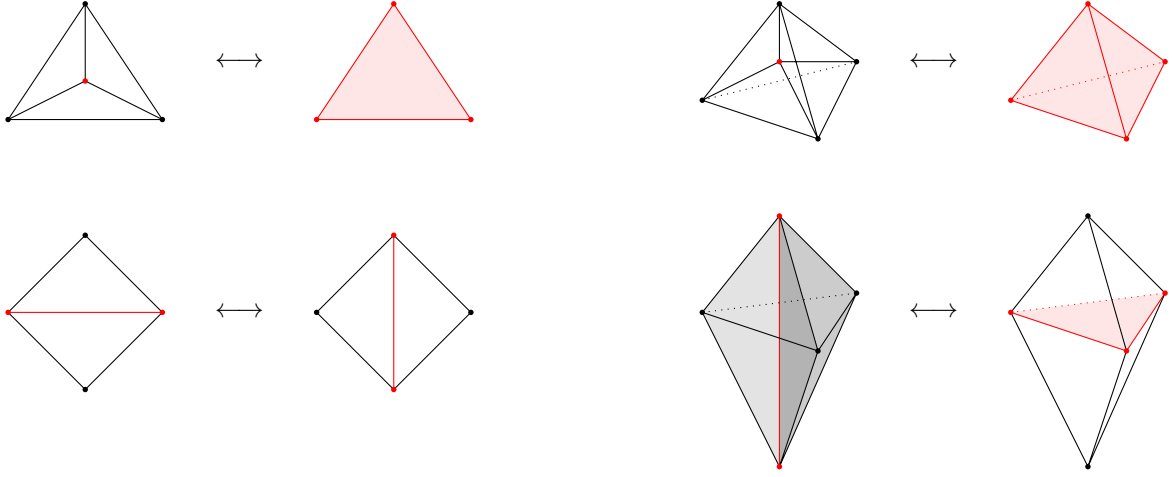


FIGURA 3. Flips en dimensiones 3 y 4. En la figura aparecen las intersecciones de los conos que intervienen en el flip con un hiperplano afín. A la izquierda en dimensión 3, arriba es $m = 1, 3$ y abajo es $m = 2$; a la derecha en dimensión 4, arriba es $m = 1, 4$ y abajo es $m = 2, 3$. En rojo aparecen señalados los respectivos conos τ y τ' en cada caso.

Lema 4.3.1. *Sea Π el abanico normal de un símple, y sea ℓ cualquier función convexa en Π . Entonces, las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski se satisfacen para (Π, ℓ) .*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\dim H^k(\Pi) = 1$ para $0 \leq k \leq d$. En $H^1(\Pi)$ tenemos entonces que las clases convexas son los múltiplos positivos de ℓ . Veamos que la función característica de cualquier rayo ρ de Π es convexa.

Sea ρ un rayo de Π . Podemos suponer que los rayos de Π vienen dados por vectores $e_1, \dots, e_d, e = -(e_1 + \dots + e_d)$ (donde e_1, \dots, e_d forman una base de \mathbb{R}^d), y que ρ está generado por e . Una función característica de ρ está dada por $\varphi_\rho(e_1) = \dots = \varphi_\rho(e_d) = 0$ y $\varphi_\rho(e) = \alpha > 0$ (reescalando los vectores, podemos suponer $\alpha = 1$). Dado $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d \in \mathbb{R}^d$, tenemos que $v = \lambda e + (\lambda_1 + \lambda)e_1 + \dots + (\lambda_d + \lambda)e_d$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, que φ_ρ es una función convexa en Π es una mera comprobación.

Por tanto, si φ_ρ es la función característica de un rayo ρ de Π , es $\varphi_\rho = a\ell$ para $a > 0$ en $H^1(\Pi)$. Si ρ_1, \dots, ρ_d son d rayos distintos de Π , tenemos que $\varphi_\sigma = \varphi_{\rho_1} \cdots \varphi_{\rho_d} = (a_1 \cdots a_d)\ell^d$ en $H^1(\Pi)$ para el cono maximal σ que generan. Así, $\langle \ell^n \rangle = (a_1 \cdots a_d)^{-1} \langle \varphi_\sigma \rangle > 0$.

Por otra parte, tenemos que ℓ genera $H(\Pi)$ como álgebra, luego $\ell^{d-2k+1} : H^k(\Pi) \longrightarrow H^{d-k+1}(\Pi)$ es un isomorfismo para $k > 0$ y $\ell^{d+1} : H^0(\Pi) \longrightarrow H^{d+1}(\Pi)$ es la aplicación 0. Así, $PH(\Pi) = H^0(\Pi)$, y como en $PH^0(\Pi) = H^0(\Pi)$ es $Q_\ell(h) = \langle \ell^d h h \rangle = h^2 \langle \ell^d \rangle > 0$ para todo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Q_ℓ es definida positiva en $PH^0(\Pi)$. Como $PH^k(\Pi) = \{0\}$ para $k \geq 1$, no hay más que comprobar, y se satisfacen las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski en este caso. \square

Consideremos un m -flip que cambia Σ_{-1} por Σ_1 , reemplazando $\overline{\text{st}}(\tau) = \Delta_{-1}$ por $\overline{\text{st}}(\tau') = \Delta_1$. Tenemos que $\dim \tau = m$ y $\dim \tau' = d - m + 1$. Combinatoriamente, es

$$\Delta_{-1} \simeq [\tau] \times \Pi^{d-m},$$

donde $[\tau]$ es el abanico formado por τ y todas sus caras, y Π^{d-m} es el abanico normal de un $(d-m)$ -símple, ya que los conos maximales de Δ_{-1} tienen los m rayos de τ y otros $d-m$ de entre v_{m+1}, \dots, v_{d+1} . Así, como la estructura de $H(\Delta_{-1})$ depende de la estructura de los conos maximales de Δ_{-1} ,

$$H(\Delta_{-1}) \simeq H(\Pi^{d-m}),$$

que tiene dimensión 1 en grados $k = 0, \dots, d-m$ y 0 en grados $k = d-m+1, \dots, d$. También,

$$H^k(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) \simeq H^{k-m}(\Pi^{d-m}),$$

que tiene dimensión 1 en grados $k = m, \dots, d$ y 0 en grados $k = 0, \dots, m-1$. De forma similar, tenemos que

$$\Delta_1 \simeq [\tau'] \times \Pi^{m-1},$$

luego

$$H(\Delta_1) \simeq H(\Pi^{m-1}),$$

que tiene dimensión 1 en grados $k = 0, \dots, m-1$ y 0 en grados $k = m, \dots, d$, y

$$H^k(\Delta_1, \partial\Delta_1) \simeq H^{k-(d-m+1)}(\Pi^{m-1})$$

con dimensión 1 para $k = d-m+1, \dots, d$ y 0 para $k = 0, \dots, d-m$.

Sea $\Gamma = \Sigma_{-1} \setminus \text{st}(\tau) = \Sigma_1 \setminus \text{st}(\tau')$, y consideramos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow H(\Delta_{\pm 1}, \partial\Delta_{\pm 1}) \longrightarrow H(\Sigma_{\pm 1}) \longrightarrow H(\Gamma) \longrightarrow 0 \quad (\star)$$

y

$$0 \longrightarrow H(\Gamma, \partial\Gamma) \longrightarrow H(\Sigma_{\pm 1}) \longrightarrow H(\Delta_{\pm 1}) \longrightarrow 0. \quad (\star\star)$$

Vamos a construir una inclusión $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$ usando aplicaciones de las sucesiones exactas.

En grados $k = 0, \dots, m-1$, las sucesiones (\star) nos dan isomorfismos

$$H^k(\Sigma_1) \longrightarrow H^k(\Gamma) \longleftarrow H^k(\Sigma_{-1}).$$

Por otra parte, en grados $k = m, \dots, d$ las sucesiones $(\star\star)$ nos dan aplicaciones

$$H^k(\Sigma_1) \longleftarrow H^k(\Gamma, \partial\Gamma) \hookrightarrow H^k(\Sigma_{-1}).$$

Así, las correspondientes composiciones nos dan inclusiones $H^k(\Sigma_1) \hookrightarrow H^k(\Sigma_{-1})$ para cada grado k (que son isomorfismos para $k = 0, \dots, m-1$ y $k = d-m+1, \dots, d$), y tenemos una inclusión como espacios vectoriales $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$ (no lo es de anillos en general). Se puede comprobar que esta inclusión conmuta con las inclusiones desde $H(\Gamma, \partial\Gamma)$ y las proyecciones a $H(\Gamma)$ para todos los grados. De hecho, es la única aplicación lineal $H(\Sigma_1) \rightarrow H(\Sigma_{-1})$ que lo hace.

Veamos cuál es el conúcleo de la inclusión. Como las inclusiones $H^k(\Sigma_1) \hookrightarrow H^k(\Sigma_{-1})$ son isomorfismos para grados $k = 0, \dots, m-1, d-m+1, \dots, d$, el conúcleo de la inclusión solo es no nulo en grados $k = m, \dots, d-m$.

Para $m \leq k \leq d-m$, como $H^k(\Gamma, \partial\Gamma) \simeq H^k(\Sigma_1)$, tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow H^k(\Sigma_1) \longrightarrow H^k(\Sigma_{-1}) \longrightarrow H^k(\Delta_{-1}) \longrightarrow 0.$$

Ahora tenemos que, como $H^k(\Sigma_{-1}) \rightarrow H^k(\Delta_{-1})$ es sobreyectiva,

$$H^k(\Delta_{-1}) \simeq H^k(\Sigma_{-1}) / \ker(H^k(\Sigma_{-1}) \rightarrow H^k(\Delta_{-1})) \simeq H^k(\Sigma_{-1}) / \text{im}(H^k(\Sigma_1) \rightarrow H^k(\Sigma_{-1})),$$

y por tanto

$$H^k(\Sigma) \simeq \text{im}(H^k(\Sigma_1) \rightarrow H^k(\Sigma_{-1})) \oplus H^k(\Delta_{-1}) \simeq H^k(\Sigma_1) \oplus H^k(\Delta_{-1}).$$

Por otra parte, tenemos que la composición

$$H^k(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) \rightarrow H^k(\Sigma_{-1}) \rightarrow H^k(\Delta_{-1})$$

es un isomorfismo para $k = m, \dots, d-m$, ya que la primera es inyectiva, la segunda no es nula en la imagen de la primera, y $\dim H^k(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) = \dim H^k(\Delta_{-1}) = 1$. Si definimos

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{k=m}^{d-m} H^k(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}),$$

entonces tenemos que $H(\Sigma_{-1}) = H(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}$.

Lema 4.3.2. *La descomposición $H(\Sigma_{-1}) = H(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}$ es ortogonal con respecto al emparejamiento de Poincaré.*

DEMOSTRACIÓN. Recordamos que el emparejamiento de Poincaré en Σ_{-1} es

$$\begin{aligned} H^k(\Sigma_{-1}) \times H^{d-k}(\Sigma_{-1}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\bar{f}, \bar{g}) &\longmapsto \langle fg \rangle_{\Sigma_{-1}}. \end{aligned}$$

Si $k < m$ o $k > d-m$, no hay nada que demostrar, ya que entonces $d-k > d-m$ o $d-k < m$ y $\mathcal{K}^k = \mathcal{K}^{d-k} = 0$. Por tanto, sea $m \leq k \leq d-m$. Dados $\bar{f} \in H^k(\Sigma_{-1})$ y $\bar{g} \in H^{d-k}(\Sigma_{-1})$, tenemos que existen $\bar{f}_1 \in H^k(\Sigma_1)$, $\bar{f}_2 \in \mathcal{K}^k$, $\bar{g}_1 \in H^{d-k}(\Sigma_1)$, $\bar{g}_2 \in \mathcal{K}^{d-k}$ únicos de forma que $\bar{f} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2$, $\bar{g} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2$. Ahora, \bar{f}_1 y \bar{g}_1 se corresponden con elementos de $H(\Gamma, \partial\Gamma)$ como subespacio de $H(\Sigma_{-1})$, y \bar{f}_2 y \bar{g}_2 se corresponden con elementos de $H(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1})$, también como subespacio de $H(\Sigma_{-1})$. Como se tiene que $H(\Gamma, \partial\Gamma) \cdot H(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) = 0$, se sigue que

$$\langle fg \rangle = \langle f_1 g_1 \rangle + \langle f_1 g_2 \rangle + \langle f_2 g_1 \rangle + \langle f_2 g_2 \rangle = \langle f_1 g_1 \rangle + \langle f_2 g_2 \rangle,$$

y la descomposición es ortogonal para el emparejamiento de Poincaré. \square

Para $t = 0$, la función ℓ_0 es continua lineal por conos en $\Sigma_{\pm 1}$, y la forma cuadrática Q_{ℓ_0} está definida en $H(\Sigma_{\pm 1})$. Además, en P_0 el cono normal del vértice x_0 está generado por los vectores normales a las facetas que concurren en él (que son d si $m = 1$ o $d + 1$ si $m > 1$). Pero estos vectores son, precisamente, los que generan los rayos de $\partial\Delta_{\pm 1}$ y, por tanto, la función ℓ_0 es lineal en $|\Delta_{\pm 1}|$. Así, si $f \in \mathfrak{m}$ es tal que $\ell_0|_{|\Delta_{\pm 1}|} = f|_{|\Delta_{\pm 1}|}$, tenemos que $\ell_0 - f \in R_{\Gamma, \partial\Gamma, 1}$, y ℓ_0 define una clase en $H^1(\Gamma, \partial\Gamma)$. Notemos que, aunque la inclusión $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$ no es un homomorfismo de anillos en general, sí que conmuta con la multiplicación por elementos de $H(\Gamma, \partial\Gamma)$: dados $f \in H(\Sigma_1)$ y $h \in H(\Gamma, \partial\Gamma)$, tenemos que hf es un elemento de $H(\Gamma, \partial\Gamma)$ como subespacio de $H(\Sigma_1)$ y, como la proyección $H(\Gamma, \partial\Gamma) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$ conmuta con la inclusión $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$, la imagen de $hf \in H(\Sigma_1)$ en $H(\Sigma_{-1})$ es igual a $h \in H(\Gamma, \partial\Gamma) \subseteq H(\Sigma_{-1})$ por la imagen de $f \in H(\Sigma_1)$ en $H(\Sigma_{-1})$.

Lema 4.3.3. *La forma Q_{ℓ_0} en $H(\Sigma_{\pm 1})$ conmuta con la inclusión $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$.*

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que, si $h \in H^k(\Sigma_1)$ y h' es su imagen en $H(\Sigma_{-1})$, es

$$\langle \ell_0^{d-2k} h \cdot h \rangle_{\Sigma_1} = \langle \ell_0^{d-2k} h' \cdot h' \rangle_{\Sigma_{-1}}.$$

Notemos que tenemos el mismo isomorfismo

$$\langle \cdot \rangle_{\Sigma_{\pm 1}} : H(\Gamma, \partial\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si $d - 2k > 0$, tenemos que $\ell_0^{d-2k} \in H(\Gamma, \partial\Gamma)$, luego $\ell_0^{d-2k} h \cdot h = \ell_0^{d-2k} h' \cdot h'$ en $H(\Gamma, \partial\Gamma)$ como subespacio de $H(\Sigma_1)$ y $H(\Sigma_{-1})$ y, por tanto, $Q_{\ell_0}(h) = Q_{\ell_0}(h')$. Si $d = 2k$, tenemos que $h \in H^{d/2}(\Sigma_1)$ y, como la inclusión $H^{d/2}(\Gamma, \partial\Gamma) \hookrightarrow H^{d/2}(\Sigma_1)$ es un isomorfismo, es $h \in H^{d/2}(\Gamma, \partial\Gamma)$ y se verifica la misma propiedad. \square

Lema 4.3.4. *La descomposición $H(\Sigma_{-1}) = H(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}$ es ortogonal con respecto a la forma cuadrática Q_{ℓ_t} , $t \leq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $t \leq 0$, y sea $k \leq \frac{1}{2}d$. Tenemos que ℓ_t^{d-2k} lleva elementos de \mathcal{K}^k en elementos de \mathcal{K}^{d-k} , de forma trivial si $k < m$ porque $\mathcal{K}^k = \mathcal{K}^{d-k} = 0$ y porque $H(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1})$ es un ideal de $H(\Sigma_{-1})$ en otro caso. Por tanto, si $f \in H^k(\Sigma_1)$ y $g \in H^k$, tenemos que

$$Q_{\ell_t}(f + g) = \langle \ell_t^{d-2k}(f + g)(f + g) \rangle = \langle \ell_t^{d-2k}ff \rangle + \langle \ell_t^{d-2k}gg \rangle + 2\langle \ell_t^{d-2k}fg \rangle = Q_{\ell_t}(f) + Q_{\ell_t}(g) + 2\langle \ell_t^{d-2k}gf \rangle.$$

Ahora, por el Lema 4.3.2, como $\ell_t^{d-2k}g \in \mathcal{K}^{n-k}$ y $f \in H^k(\Sigma_1)$, $\langle \ell_t^{d-2k}g \cdot f \rangle = 0$ y

$$Q_{\ell_t}(f + g) = Q_{\ell_t}(f) + Q_{\ell_t}(g).$$

\square

Lema 4.3.5. *La forma $(-1)^m Q_{\ell_t}$ es definida positiva en \mathcal{K}^m para cada $t < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $t < 0$. Queremos evaluar Q_{ℓ_t} en el subespacio

$$\mathcal{K}^m = H^m(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) = \varphi_{\tau} H^0(\Delta_{-1})$$

a través de la proyección $\pi : \Delta_{-1} \longrightarrow \Pi = \Pi^{d-m}$ con dirección $L(\tau)$ en el abanico normal de un $(d - m)$ -símplice.

Sea ρ un rayo de τ con función característica φ . Veamos que φ es cóncava en Δ_{-1} . Sea ρ' un rayo de τ' . El resto de rayos de Δ_{-1} generan una faceta γ en $\partial\Delta_{\pm 1}$. Sea h la función soporte de γ igual a φ en ρ : si v_{ρ} es el vector que genera ρ y $v_{\gamma,1}, \dots, v_{\gamma,d-1}$ son los vectores que generan γ , $v_{\rho}, v_{\gamma,1}, \dots, v_{\gamma,d-1}$ forman una base de V y definimos h como $h(v_{\rho}) = \varphi(v_{\rho})$, $h(v_{\gamma,i}) = 0$ para $1 \leq i \leq d - 1$. Entonces, $h - \varphi$ es una función característica de ρ' : la función $h - \varphi$ es continua lineal por conos en Δ_{-1} , y si llamamos $v_{\rho'}$ al rayo que genera ρ' , tenemos que

$$(h - \varphi)(v_{\rho'}) = h(v_{\rho'}) - \varphi(v_{\rho'}) = h(v_{\rho'}) - 0 = h(v_{\rho'}),$$

$$(h - \varphi)(v_{\rho}) = h(v_{\rho}) - \varphi(v_{\rho}) = \varphi(v_{\rho}) - \varphi(v_{\rho}) = 0,$$

$$(h - \varphi)(v_{\gamma,i}) = h(v_{\gamma,i}) - \varphi(v_{\gamma,i}) = 0 - 0 = 0, \quad 1 \leq i \leq d - 1;$$

además, es $h(v_{\rho'}) > 0$ porque $h(v_{\rho}) = \varphi(\rho) > 0$ y los dos vectores están en el mismo semiespacio determinado por γ .

Ahora, ordenamos los vectores $v_{\gamma,i}$ de forma que $v_{\gamma,1}, \dots, v_{\gamma,d-m}$ y $v_{\rho'}$ son los vectores que generan τ' . Consideramos la proyección $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ dada por $\pi(v_{\gamma,i}) = e_i$ para $1 \leq i \leq d - m$, $\pi(v_{\gamma,i}) = 0$ para $d + 1 - m \leq i \leq d - 1$, $\pi(v_{\rho}) = 0$ y $\pi(v_{\rho'}) = e = -(e_1 + \dots + e_{d-m})$ (donde e_1, \dots, e_{d-m} es una base de \mathbb{R}^{d-m}). La imagen de Δ_{-1} por π es el abanico normal de un símplice $d - m$ dimensional, Π . Definimos la función continua lineal por conos ψ en Π , dada por $\psi(e) = 1$, $\psi(e_1) = \dots = \psi(e_{d-m}) = 0$, que es una función característica de un rayo de Π (y, por tanto, convexa).

Por tanto, tenemos que $h - \varphi$ es el pullback de ψ , una función convexa en Π , luego es una función convexa en Δ_{-1} , y por tanto $\varphi = -(h - \varphi) - h$ es una función cóncava en Δ_{-1} (ya que es la opuesta de una función convexa mas una función lineal global).

Se sigue que, para cada rayo ρ , existe una elección de función característica φ_ρ de forma que $\ell_t|_{\Delta_{-1}} = -\varphi_\rho$ en $H^1(\Delta_{-1})$, ya que $H^1(\Delta_{-1}) = 1$ y las clases convexas son los múltiplos positivos de $\ell_t|_{\Delta_{-1}}$. Así, podemos escribir $(-\ell_t)^m = \varphi_\tau$.

Tenemos por tanto un isomorfismo

$$H^m(\Pi) \longrightarrow H^m(\Delta_{-1}) \longrightarrow H^0(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}).$$

Sea la restricción de ℓ_t a Δ_{-1} el pullback de una función convexa ℓ en Π . Bajo este isomorfismo, la forma $(-1)^m Q_{\ell_t}$ en \mathcal{K}^m se corresponde con la forma Q_ℓ en $H^0(\Pi)$, ya que, para $f \in H^{d-m}(\Pi)$,

$$(-1)^m \langle \ell_t^m \pi^*(f) \rangle_{\Sigma_{-1}} = \langle \varphi_\tau \pi^*(f) \rangle_{\Sigma_{-1}} = \langle f \rangle_\Pi,$$

luego, para $h \in \mathcal{K}^m = H^m(\Delta_{-1}, \partial\Delta_{-1}) = (-1)^m \ell_t^m H^0(\Delta)$, tenemos que $h = (-1)^m \ell_t^m \alpha$ con $\alpha \in H^0(\Delta_{-1}) \simeq H^0(\Pi) \simeq \mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned} (-1)^m Q_{\ell_t}(h) &= (-1)^m \langle \ell_t^{d-2m} h \cdot h \rangle_{\Sigma_{-1}} = \alpha^2 (-1)^m \langle \ell_t^{d-2m} (-1)^m \ell_t^m (-1)^m \ell_t^m \rangle_{\Sigma_{-1}} \\ &= \alpha^2 (-1)^m \langle \ell_t^m \pi^*(\ell^{d-m}) \rangle_{\Sigma_{-1}} = \alpha^2 \langle \ell^{d-m} \rangle_\Pi = Q_\ell(\alpha). \end{aligned}$$

Además, como Q_ℓ es definida positiva en $PH^0(\Pi) = H^0(\Pi)$, $(-1)^m Q_{\ell_t}$ lo es en $PK^m = \mathcal{K}^m$. \square

El siguiente resultado va a ser una herramienta fundamental para la demostración de los dos Teoremas principales, que demostraremos por inducción simultáneamente.

Lema 4.3.6. *Sea Σ un abanico simplicial completo con una función lineal por conos ℓ_Σ tal que $\ell_\Sigma 0$ en $V \setminus \{0\}$. Para un rayo $\rho \in \Sigma$, sea $\Delta = \overline{\text{st}}(\rho)$, sea π la proyección a lo largo de ρ y sea $\Lambda = \pi(\Delta)$. La clase de $\ell_\Sigma|_\Delta \in H^1(\Delta)$ es el pullback de una clase $\ell \in H^1(\Lambda)$. Supongamos que para cada rayo ρ de Σ tenemos que el par (Λ, ℓ) satisface las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski. Entonces ℓ_Σ satisface el Teorema Duro de Lefschetz en Σ .*

DEMOSTRACIÓN. Por dualidad de Poincaré, como $\dim H^k(\Sigma) = \dim H^{d-k}(\Sigma)$, basta ver que la multiplicación por $\ell^{d-2k} : H^k(\Sigma) \longrightarrow H^{d-k}(\Sigma)$ es inyectiva para todo $k \leq \frac{1}{2}d$. Así, sea $f \in H^k(\Sigma)$ tal que $\ell_\Sigma^{d-2k} f = 0$; veamos que $f = 0$.

Por hipótesis, podemos escribir $\ell_\Sigma = \sum_\rho \varphi_\rho$ escalando las funciones características de forma que $\varphi_\rho|_\rho = \ell_\Sigma|_\rho$ para todo rayo $\rho \in \Sigma$. Para cada ρ , $f|_\Delta$ es el pullback de alguna clase $g \in H^k(\Lambda)$ que es primitiva con respecto a ℓ , ya que $\ell^{(d-1)-2k+1}g = \ell^{d-2k}g$ va al elemento 0 por el isomorfismo $H(\Lambda) \simeq H(\Delta)$. Así, aplicando las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski en cada Λ , tenemos que

$$0 = (-1)^k \langle \ell_\Sigma^{d-2k} f^2 \rangle_\Sigma = \sum_\rho (-1)^k \langle \varphi_\rho \ell_\Sigma^{d-1-2k} f^2 \rangle_\Sigma = \sum_\rho (-1)^k \langle \ell^{(d-1)-2k} g^2 \rangle_\Lambda \geq 0,$$

y la igualdad en la última parte implica que $g = 0$ en cada Λ correspondiente. Esto es, cada $f|_\Delta \in H(\Delta)$ tiene que ser 0. Esto implica que $\varphi_\rho f = 0$ en $H(\Sigma)$ para todo rayo ρ . Como las funciones características generan $H^{d-k}(\Sigma)$, tenemos que $fg = 0$ para todo $g \in H^{d-k}(\Sigma)$, esto es, $\langle fg \rangle_\Sigma = 0$ para todo $g \in H^{d-k}(\Sigma)$ y, como el emparejamiento de Poincaré es no degenerado, tiene que ser $f = 0$. \square

Notemos que la clase de una función convexa en Σ tiene un representante que satisface la primera hipótesis del Lema, sin más que sumar una función global constante suficientemente grande, y también lo tiene la clase de ℓ_0 en $\Sigma_{\pm 1}$.

Finalizamos con los siguientes dos Teoremas; las partes (i) son los dos Teoremas principales, 4.2.1 y 4.2.2, las otras partes son auxiliares en la inducción.

Teorema 4.3.7. *La función continua lineal por conos ℓ define una operación de Lefschetz en $H(\Sigma)$ en los siguientes casos:*

- (a) ℓ es una función convexa en un abanico simplicial completo Σ ,
- (b) $\ell = \ell_0$ en Σ_1 , y
- (c) $\ell = \ell_0$ en Σ_{-1} cuando $m = \frac{1}{2}d$.

Teorema 4.3.8. *La función continua lineal por conos ℓ satisface las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski en $H(\Sigma)$ en los siguientes casos:*

- (a) ℓ es una función convexa en un abanico simplicial completo Σ ,
- (b) $\ell = \ell_0$ en Σ_1 , y
- (c) $\ell = \ell_0$ en Σ_{-1} cuando $m = \frac{1}{2}d$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer la demostración de los dos Teoremas simultáneamente por inducción. Veamos primero que el Teorema 4.3.8 en dimensión $(d-1)$ implica el Teorema 4.3.7 en dimensión d .

4.3.7(a) es inmediato a partir de 4.3.8(a) usando el último Lema.

Para 4.3.7(b), vamos a invocar de nuevo el Lema anterior usando esta vez las tres partes del Teorema 4.3.8. En primer lugar, si tomamos un rayo que no esté en Δ_1 , su estrella es un subabanico simplicial de Γ en el que ℓ_0 es una función convexa y se verifica 4.3.8(a).

Sea ahora ρ un rayo de Δ_1 (que también lo es de Δ_{-1}). Así, tenemos que $\overline{\text{st}}(\rho) \cap \Delta_t \neq \emptyset$ y podemos proyectar $\overline{\text{st}}(\rho)$ sobre un abanico simplicial completo $(d-1)$ -dimensional Λ_t , de forma que Λ_1 se obtiene de Λ_{-1} a través de un flip, que es un m flip si $\rho \subseteq \tau'$, y un $(m-1)$ -flip si $\rho \subseteq \tau$.

Para verlo, supongamos que ρ es un rayo en τ , por ejemplo, generado por v_1 . Sea e_2, \dots, e_d una base de \mathbb{R}^{d-1} , y definimos la proyección $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ por $\pi(v_1) = 0$, $\pi(v_i) = e_i$, $2 \leq i \leq d$; definimos también el vector $e = \pi(v_{d+1})$. Así, el cambio que se produce entre Λ_{-1} y Λ_1 es el intercambio de los abanicos

$$\pi(\overline{\text{st}}(\rho) \cap \Delta_{-1}) = \overline{\text{st}}(\text{pos}(e_2, \dots, e_m)) \text{ y } \pi(\overline{\text{st}}(\rho) \cap \Delta_1) = \overline{\text{st}}(\text{pos}(e_{m+1}, \dots, e_d, e)),$$

esto es, un $(m-1)$ -flip. Si ρ está en τ' , razonamos de forma similar haciendo $\pi(v_{d+1}) = 0$, $e = \pi(e_1)$.

Así, si $m < \frac{1}{2}(d+1)$ o $m = \frac{1}{2}(d+1)$ con $\rho \subseteq \tau$, se aplica 4.3.8(b). Notemos que, si $m = 1$, τ es sólo un rayo que no está en Σ_1 , ya que el flip de Σ_1 a Σ_{-1} es, precisamente, la subdivisión estelar en este rayo, y por tanto no estamos considerando nunca un 0-flip. Por último, si $m = \frac{1}{2}(d+1)$ con $\rho \subseteq \tau'$, se obtiene Λ_1 a partir de Λ_{-1} con un m -flip, $m = \frac{1}{2}((d-1)+2) > \frac{1}{2}((d-1)+1)$, contrario a nuestra convención de etiquetas de $\Lambda_{\pm 1}$. Sin embargo, este flip es el inverso de un m' -flip con $m' = (d-1) - m + 1 = \frac{1}{2}(d-1)$, y con este etiquetado inverso, se aplica 4.3.8(c). Esto establece 4.3.7(b).

Por último, 4.3.7(c) se sigue de 4.3.7(a) y 4.3.7(b) a través de la descomposición $H(\Sigma_{-1}) = H(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}$. Como la multiplicación por $\ell_0 \in H(\Gamma, \partial\Gamma)$ conmuta con la inclusión $H(\Sigma_1) \hookrightarrow H(\Sigma_{-1})$, aplicamos 4.3.7(b) para el primer sumando. El segundo es solo no nulo para el grado $m = \frac{1}{2}d$, donde la propiedad de Lefschetz es trivial. Así, tenemos 4.3.7(c).

Veamos ahora que el Teorema 4.3.7 en dimensión d implica el Teorema 4.3.8 en dimensión d .

En primer lugar, observemos que ℓ_t varía de forma lineal en t en cada cono de Σ_1 para $t \geq 0$ y de Σ_{-1} para $t \leq 0$. Así, las matrices de Q_{ℓ_t} en $H^k(\Sigma_1)$ (resp. $H^k(\Sigma_{-1})$) tienen, respecto de cualquier base, coeficientes lineales en $t \in [0, 1]$ (resp. $t \in [-1, 0]$), y podemos aplicar la Proposición 4.2.4.

De 4.3.7(a) y 4.3.7(b) tenemos que Q_{ℓ_t} es no degenerada en $H(\Sigma_1)$ para $t \geq 0$. Por tanto, su signatura en $H^k(\Sigma_1)$ es constante para $t \geq 0$. Por el Lema 4.3.3, Q_{ℓ_0} es la misma en $H(\Sigma_1)$ que en el primer sumando de $H(\Sigma_{-1}) = H(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}$, de forma que Q_{ℓ_0} tiene la misma signatura en este sumando de $H^k(\Sigma_{-1})$ que en $H^k(\Sigma_1)$. Como Q_{ℓ_t} es no degenerada en $H^k(\Sigma_{-1})$ para $t < 0$ (también por 4.3.7(a)), lo es en el primer sumando, y por continuidad tenemos que Q_{ℓ_1} en $H^k(\Sigma_1)$ tiene el mismo rango y la misma signatura que $Q_{\ell_{-1}}$ en el primer sumando de $H^k(\Sigma_{-1}) = H^k(\Sigma_1) \oplus \mathcal{K}^k$. Por último, el Lema 4.3.5 nos da la signatura de Q_{ℓ_t} en \mathcal{K}^k para $t < 0$. Como la descomposición es ortogonal con respecto a Q_{ℓ_t} (Lema 4.3.4), la signatura de $Q_{\ell_{-1}}$ en $H^k(\Sigma_{-1})$ es la suma de sus signaturas en $H^k(\Sigma_1)$ y en \mathcal{K}^k , con lo que

$$\text{sign}(Q_{\ell_{-1}}, H^k(\Sigma_{-1})) = \text{sign}(Q_{\ell_{-1}}, H^k(\Sigma_1)) + \text{sign}(Q_{\ell_{-1}}, \mathcal{K}^k) = \text{sign}(Q_{\ell_1}, H^k(\Sigma_1)) + \text{sign}(Q_{\ell_{-1}}, \mathcal{K}^k)$$

y las relaciones de Hodge-Riemann-Minkowski se verifican para (Σ_1, ℓ_1) si y sólo si lo hacen para (Σ_{-1}, ℓ_{-1}) . Dado un abanico simplicial completo Σ y una función convexa ℓ en Σ , eligiendo una sucesión de flips para transformar Σ en el abanico normal de un símple y, usando el Lema 4.3.1, tenemos la demostración de 4.3.8(a).

Ya hemos visto que la signatura de Q_{ℓ_t} en $H^k(\Sigma_1)$ es constante para $t \geq 0$, con lo que 4.3.8(a) implica 4.3.8(b).

Finalmente, 4.3.8(c) se sigue de 4.3.8(a) y 4.3.7(c), ya que, como Q_{ℓ_0} es no degenerada en $H^k(\Sigma_{-1})$ por ser ℓ_0 Lefschetz en $H(\Sigma_{-1})$, tiene la misma signatura en $H^k(\Sigma_{-1})$ que $Q_{\ell_{-1}}$. \square

Como consecuencia, tenemos una demostración de la necesidad de las condiciones de McMullen.

Corolario 4.3.9. *El h -vector de todo politopo simple satisface las condiciones de McMullen.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P un politopo simple con h -vector $h = (h_0, \dots, h_d)$. Sea Σ su abanico normal y ℓ su función soporte, que es convexa en Σ .

Ya sabemos que h verifica las ecuaciones de Dehn-Sommerville. Por otra parte, tenemos la \mathbb{R} -álgebra graduada $H(\Sigma)$, generada por $H^1(\Sigma)$, y la clase de ℓ que induce isomorfismos $H^k(\Sigma) \rightarrow H^{d-k}(\Sigma)$ a través de la multiplicación por ℓ^{d-2k} para $k \leq \frac{d}{2}$. Por tanto, si consideramos el ideal I de $H(\Sigma)$ generado por ℓ y $H^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1}(\Sigma)$ y el cociente $R = H(\Sigma)/I$, tenemos que R es una \mathbb{R} -álgebra graduada generada por R_1 y cuya función de Hilbert viene dada por el g -vector de P . Así, $g(P)$ es un M -vector. \square

Bibliografía

- [Adi18] K. Adiprasito, Combinatorial Lefschetz Theorems beyond positivity, arXiv preprint arXiv:1812.10454v4.
- [AM69] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [Bri97] M. Brion, The Structure of the Polytope Algebra, *Tôhoku Math. J.* **49** (1997), 1–32.
- [FK10] B. Fleming, K. Karu, Hard Lefschetz Theorem for Simple Polytopes, *J. Algebr. Comb.* **32** (2010), 227–239.
- [DLRS10] J. A. De Loera, J. Rambau, F. Santos, *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [BL81] L. J. Billera, C. W. Lee, A Proof of the Sufficiency of McMullen’s Conditions for f -Vectores of Simplicial Convex Polytopes, *J. of Comb. Theory Series A* **31** (1981), 237–255.
- [Ewa96] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1996.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [Kal88] G. Kalai, Many Triangulated Spheres, *Disc. & Comp. Geom.* **3** (1988), 1–14.
- [Mac27] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 531–555.
- [Man72] P. Mani, Spheres with few Vertices, *Jour. of Comb. Theory, Series A* **13**(3) (1972), 346–352.
- [McM71] P. McMullen, The Numbers of Faces of Simplicial Polytopes, *Israel J. of Math.* **9** (1971), 559–570.
- [McM89] P. McMullen, The Polytope Algebra, *Adv. in Math.* **78** (1989), 76–130.
- [McM93] P. McMullen, On Simple Polytopes, *Invent. Math.* **113** (1993), 419–444.
- [McM96] P. McMullen, Weights on Polytopes, *Disc. Comput. Geom.* **15** (1996), 363–388.
- [McMW71] P. McMullen, D. W. Walkup, A Generalized Lower-Bound Conjecture for Simplicial Polytopes, *Mathematika* **18**(2) (1971), 264–273.
- [Sta80] R. P. Stanley, The Number of Faces of a Simplicial Convex Polytope, *Adv. in Math.* **35** (1980), 236–238.
- [Sta91] R. P. Stanley, On the Hilbert Function of a Graded Cohen-Macaulay Domain, *J. Pure Applied Algebra* **73** (1991), 307–314.
- [Sta96] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra (Second Edition)*, Birkhäuser Basel, 1996.
- [Ste06] E. Steinitz, Über die Eulerschen Polyederrelationen, *Archiv für Mathematik und Physik* **11** (1906), 86–88.
- [Ste77] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, en *Real and complex singularities, Oslo 1976*, P. Holm, Ed., Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan der Rijn, Países Bajos, 1977.
- [Wal70] D. W. Walkup, The Lower-bound Conjecture for 3– and 4–manifolds, *Acta Math.* **125** (1970), 75–107.
- [Zie95] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag New York, 1995.